Vad är reglerteknik?

Styrning av dynamiska system med återkoppling.

Styrning: Påverka något för att åstadkomma en effekt.

Ex

Gaspedal → Hastighet, acceleration

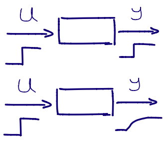
Duschkran → Vattentemperatur, vattenflöde

Spänning → Hastighetsändring

Dynamiska system: Tröghet, minneseffekt

Dynamik beskrivs med diffekv.

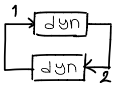
Ex



$y(t)=f(u(t))$ Statisk

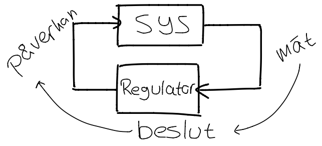
$y(t)=f(u(s), s<t)$ dynamiskt

Återkoppling:



2 beror på 1 som beror på 2 ....

Reglerkrets

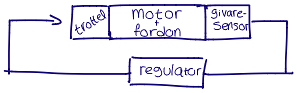


Ex Farthållare

Uppgift: Håll bilens hastighet konstant.

Mätning: Hastighetsgivare

Påverkan: Trottelvinkel



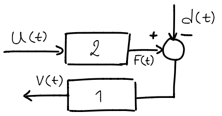
Processmodell

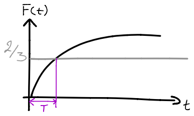
För att beskriva dynamiken.

Störning

1) Newton: $ma = m \cdot \frac{dv}{dt} = E \cdot F_i = F(t) - b \cdot v(t) - \overbrace{mg \cdot \sin(\alpha t)}^{d(t)} = F(t) - b - V(t) - d(t)$

2) Motordynamik: $\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-1}{T}(F(t) - ku(t))$





$m = 100 kg$

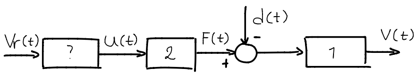
$b = 0.2 \frac{kNs}{m}$

$k = 10 \frac{kN}{rad}$

$T = 1s$

Önskemål: $V(t) = V_r(t)$

Öppen styrning:



Stationärt: $\frac{d(\cdot)}{dt} = 0$, antag $d(t) = 0$

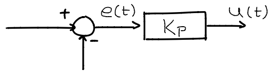
1) $m \cdot \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow F(t) - bv(t) = 0$, $V = V_r \Rightarrow F = b \cdot V_r$

2) $\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-1}{T}(F(t) - ku(t)) \Rightarrow F = ku \Leftrightarrow u = \frac{F}{k} = \frac{b}{k} \cdot V_r$

Då har vi en regulator som bortsett från dynamiken ej tagit hänsyn till störningar och påverkas av osäkerheten i modellen.

Återkopplade System

P-regulator: $u(t) = K_P(V_r(t) - V(t))$

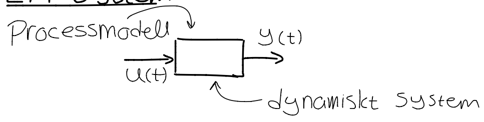


$e(t)$ kallas reglerfel

Open loop control system, closed loop control system

Med återkoppling kan vi minska effekten av osäkerhet (störning) och forma systemets dynamik.

LTI-System



Diffekv

Bra sätt att modellera/beskriva dynamiska system.

Ex Farthållare från förra föreläsningen

1) $m\frac{dv}{dt} = F(t) - bv(t) - d(t)$

2) $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{T}(-F(t) + ku(t))$ $\quad d\,t = 0$

3) derivera $1 \Rightarrow m\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dF}{dt} - \frac{dv}{dt}$

3)$\cdot T + 1) \Rightarrow mT\frac{d^2v}{dt^2} + m\frac{dv}{dt} = \underbrace{T\frac{dF}{dt} - F(t)}_{ku(t)} - bT\frac{dv}{dt} - bv(t)$

$mT\frac{d^2v}{dt} + (m + bT)\frac{dv}{dt} + bv(t) = ku(t)$ ← diffekv.

massor om hur man löser de.

Poler och Nollställen

Rötterna till $a(s)$ kallas poler och rötterna till $b(s)$ kallas nollställen: $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$

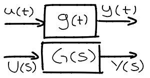
Polernas placering avgör om $G(s)$ är "insignal-utsignal-stabil". Poler med $Re<0$ är stabila.

Överföringsfunktionen $G(s)$ kan användas för att lösa de med godtycklig insignal.

Definiera laplacetransformen för en tidsfunktion $f(t)$. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0)$.

Om systemet är i vila vid $t=0 \Rightarrow Y(s) = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n}U(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) = G(s)U(s)$

Vi kan nu representera ÖF som blockelement.



Laplacetransformen uppfyller faltningssatsen

$G(s)U(s) = \mathcal{L}\{\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\} = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ kallas viktfunktion

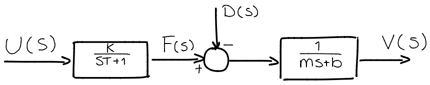
Tidsplanet: $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$

Laplacedomän: $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$

Farthållare

1) $m\frac{dv}{dt} = F(t) - bv(t) - d(t)$ $\qquad \mathcal{L}\{1\}: (ms+b)V(s) = F(s) - D(S) \Rightarrow \quad V(s) = \frac{1}{ms+b}(F(s) - D(s))$

2) $\frac{dF}{dt} = -\frac{1}{T}(F(t) - ku(t))$ $\qquad \mathcal{L}\{2\}: F(s) = \frac{k}{sT+1}U(s)$

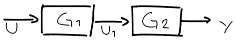


Poler i $s = \frac{-1}{T}$, $s = \frac{-b}{m}$

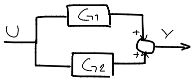
negativa ⇒ stabilt system

Blockschemaräkning

Seriekoppling: $Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$

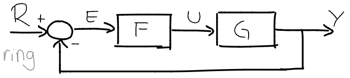


Paralellkoppling: $Y(s) = U(s)(G_1 + G_2)$



Återkoppling: $Y(s) = GF(R - Y)$

$Y = \frac{GF}{1+GF} \cdot R = \frac{L}{1+L} \cdot R$ Kretsöverföring



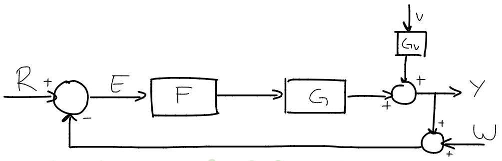
$Y = U \cdot G + V \cdot G_v$

$U = E \cdot F$

$E = R - Y - W$

$\left.\right\}$ $Y = EFG + VG_v \Leftrightarrow Y = (R-Y-W)FG + VG_v \Leftrightarrow Y(1+FG) = (R-W)FG + VG_v \Leftrightarrow$

$Y = \frac{(R-W)FG + VG_v}{1+FG}$



$Y = \frac{GF}{1+GF} \cdot R - \frac{GF}{1+GF}W + \frac{G_v}{1+GF} \cdot V$

Superpos: $W = V = 0 \Rightarrow Y = \frac{GF}{1+GF} \cdot R$

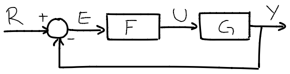
$V = R = 0 \Rightarrow Y = \frac{-GF}{1+GF} \cdot W$

$W = R = 0 \Rightarrow Y = Y_1 + G_v \cdot V = GU + G_v \cdot V = GFE + G_v \cdot V$

$= GF(R-Y) + G_v \cdot V = -GFY + G_v \cdot V =$

$Y = \frac{G_v}{1+GF} \cdot V$

Kvarstående fel



Kom ihåg felet vid simuleringen av farthållaren. $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{GF}{1+GF}R(s) = \left(1 - \frac{L}{1+L}\right)R(s) =$

$\left(\frac{1}{1+L}\right)R(s)$ går även med $\frac{\text{fram}}{1+\text{krets}} = \frac{1}{1+FG} = \frac{1}{1+L}$

Slutvärdessatsen

$t \to \infty$!

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s)$

$r(t)$: enhetssteg $\Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$ $\qquad \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+L(0)}$

Ex Farthållare

$G(s) = \frac{k}{(ms+b)(sT+1)}$

P: $F(s) = K_p$

PI: $F(s) = K_p + \frac{1}{s}K_i$

P: $u(t) = K_p \cdot e(t)$

PI: $u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau = P + I$

PID: $K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} = P + I + D$

P: $L = FG = \frac{K_p \cdot k}{(ms+b)(sT+1)}$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \frac{1}{1+L(0)} = \frac{1}{1+\frac{K_p \cdot k}{b}} = \frac{b}{b+K_pk}$, K_p stor → e litet men aldrig 0.

PI: $L = FG = \frac{(K_p \cdot \frac{k_i}{s})k}{(ms+b)(sT+1)} = \frac{(K_ps+K_i)k}{s(ms+b)(sT+1)}$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \ldots = \frac{1}{1+L(0)} = \frac{1}{1+\infty} \to 0$ "bättre valet"

Dynamiska modeller för tekniska system

Repetition: **Slutvärdessatsen**

$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot U(s)$ givet att $u(\infty)$ existerar (systemet stabilt)

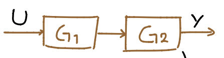
Intressant när vi ska studera kvarstående fel.

Begynnelsevärdessatsen

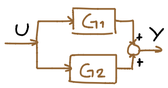
$u(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot U(s)$

Intressant att studera när vi vill se hur styrsignalen är vid stegförändringar.

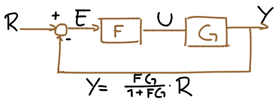
Blockschemaräkning



$Y(s) = (G_1(s)G_2(s))U(s)$



$Y(s) = (G_1 + G_2) \cdot U(s)$



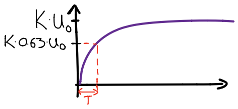
$Y = \frac{FG}{1+FG} \cdot R$

Tidsförlopp och Stegsvar

Ex 1a ordningens system: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\overset{\text{Förstärkning}}{K}}{1 + sT_{\leftarrow \text{Tidskonstant}}}$

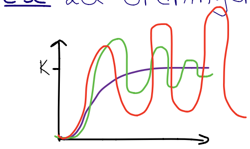
$sT \cdot Y(s) + Y(s) = K U(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \dot{y}(t) + \frac{1}{T} y(t) = \frac{K}{T} u(t) \Rightarrow$ Lösning: $y(t) = K(1 - e^{-t/T}) u_0$

Tidskonst T: $y(T) = K(1 - e^{-T/T}) u_0 = K(1 - 0.37) u_0 = K\, 0.63\, u_0$



Ger oss en känsla för hur snabbt systemet växer.

Ex 2a ordningens system: $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ← Odämpad självsvängningsfrekvens, relativ dämpning



- $\zeta \geq 1 \Rightarrow$ reella, stabila poler
- $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ komplexa, stabila (nära 0 ⇒ lång insvängning)
- $\zeta < 0 \Rightarrow$ instabilt (ökar)

Def

t_r: Stigtid ($t_{10\%} \to t_{90\%}$)

M: Överslång (hur högt går vi över $K \cdot u_0$?)

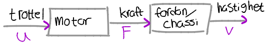
$t_{5\%}$: Settling time

Hur modellerar vi?

Strukturering

- Nedbrytning i delsystem
- Vilka variabler? ⇒ Graf eller blockschema
- Vilka kvalitativa samband?

Ex Strukturering - Farthållare



Variabler, Samband

Ställa upp basekvationer

- Balansekvationer
  - Kraft, energi, massbalanser. Storhet av samma slag.
- Konstitutiva samband ⇒ Diffekv. och algebraiska samband
  - Hur beror olika variabler av varandra? Storheter av olika slag.
- Dimensionskontroll

Formulera modell

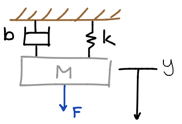
- Linjärisera?
  Laplace, annat? => Diffekv., överföringsfunktion eller tillståndsmodell.
- Välja tillståndsvariabler och formulera
  tillståndsmodell.

Mekaniska System

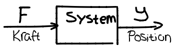
Rörelsemängdsbalans: $\frac{d}{dt}(\overset{\text{Massa}}{m}\underset{\text{position}}{\overset{\text{hastighet}}{v}}) = \sum_i \overset{\text{Krafter}}{F_i}$ → 2a ord. diffekv. per massa

Rotationssystem → Rörelsemängdsmoment $\frac{d}{dt}(J \cdot w) = \sum_i M_i$

Ex 4.1



* Strukturera



* Basekv.

1) $\frac{d^2}{dt^2}(my) = \sum_i F_i = F - F_b - F_k$

* Konstitutiva samband

2) $F_k = k \cdot y$

3) $F_b = b \cdot \frac{dy}{dt}$

* Forma modell

- Sortera ekv. 2 och 3 → 1 $\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(my) = F(t) - k \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt}$

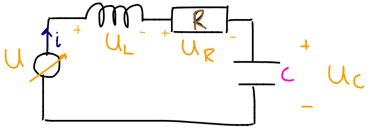
$$\Leftrightarrow m\frac{d^2y}{dt} = F(t) - ky - b\frac{dy}{dt}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F(t)$$

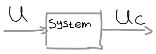
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = F(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \rightarrow G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$

Ex Elektriskt system



* Strukturering



* Basekvationer

Kirchoff => $U - U_C - U_R - U_L = 0$

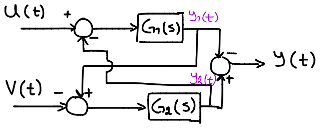
* Konstitutiva samband

$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U_R = Ri$, $i = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{dq}{dt}$

Hemuppgift: Forma modell som en ÖF.

1.17

a)



Insignaler: u(t), v(t)
Utsignal: y(t)

Sökt
Y(s) givet av U(s), V(s), $G_1(s)$, $G_2(s)$

Lösning

Inför $y_1(t)$, $y_2(t)$ som hjälpvariabler.

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s)(U(s) - Y_2(s)) & 1) \\ Y_2(s) = G_2(s)(Y_1(s) - V(s)) & 2) \\ Y(s) = Y_2(s) - Y_1(s) & 3) \end{cases}$$

$2 \to 1$: $Y_1(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)(Y_1(s) - V(s))) \iff$

$(1+G_1G_2)Y_1(s) = G_1(s)U(s) + G_1G_2(s)V(s) \iff$

$$Y_1(s) = \frac{G_1(U(s)+G_2V(s))}{1+G_1G_2}$$

$Y_1 \to 2$: $Y_2(s) = G_2\left(\frac{G_1(U(s)+G_2V(s))}{1+G_1G_2} - V(s)\right) \iff$

$Y_2(s) = G_2\left(\frac{G_1(U(s)+G_2V(s)) - V(s)(1+G_1G_2)}{1+G_1G_2}\right) \iff$

$$Y_2(s) = \frac{G_1G_2U(s) - V(s)G_2}{1+G_1G_2}$$

$$Y(s) = \frac{G_1G_2U(s) - V(s)G_2}{1+G_1G_2} - \frac{G_1(U(s)+G_2V(s))}{1+G_1G_2} = \frac{G_1(G_2-1)}{1+G_1G_2}U(s) - \frac{G_2(1+G_1)}{1+G_1G_2}V(s)$$

b)

Sökt

$\frac{Y(s)}{U(s)}$, $\frac{Y(s)}{V(s)}$

då: $G_1(s) = G(s) = \frac{1}{s+1}$

$$G_{uy} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(G_2-1)}{1+G_1G_2} = \frac{\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}-1\right)}{1+\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{\frac{-s}{(s+1)^2}}{\frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^2}} = -\frac{s}{(s+1)^2+1}$$

$$G_{vy} = \frac{Y(s)}{V(s)} = -\frac{G_2(1+G_1)}{1+G_1G_2} = -\frac{\frac{1}{s+1}\left(1+\frac{1}{s+1}\right)}{1+\frac{1}{(s+1)^2}} = -\frac{\frac{s+2}{(s+1)^2}}{\frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^2}} = -\frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

c) **Sökt**

y(t) då u(t) är ett steg $\sigma(t)$ och v(t) är en puls $\delta(t)$.

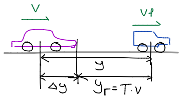
$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{v(t)\} = 1$

Dämpningssatsen: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$Y(s) = G_{uy}(s)U(s) + G_{vy}(s)V(s) = \frac{-s}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \cdot 1 = -\frac{2}{(s+1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$y(t) = -e^{-t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\} - e^{-t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = -2e^{-t} \cdot \sin(t) - e^{-t} \cdot \cos(t)$$

1.20 Intelligent farthållare (håll avstånd)



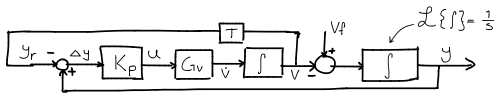
T: tidslucka
V: följebilens hastighet
a: $\dot{v} = G_v \cdot u$
u: Insignal

Använd en P-regulator med förstärkning K_p.

Rita Principiellt blockschema.

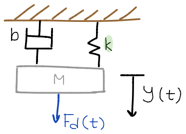
Notera: insignaler (referenssignal): y_r
Störsignal: v_f
reglerfel: Δy

$y(t) = \int (v_f(t) - v(t))dt$



Ökat avstånd kräver ökad acceleration ⇒ positiv återkoppling
y_r: önskat avstånd
Δy: avvikelse från y_r

1.231



$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_d$

Sökt

W_n: Svāngn. frekvens

ξ : dāmpn. konstant

k : Statisk fōrstārkning

Detta gjorde vi på forelāsningen innan, vi skummar lite och tar b-uppgiften.

$$G(s) = \frac{K W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2} \qquad \frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \qquad W_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \ \xi = \frac{b}{2\sqrt{km}}\ , \ K = \frac{1}{k}$$

b) **Sökt**

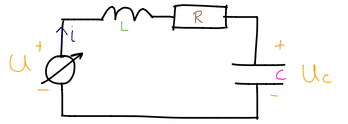
$W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2}$

$a = W_n\xi$

$W_d = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{b^2}{4km}}$ $\qquad S = -a + jW_d$: polerna

$a = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{km}}$ $\qquad$ Stegsvar: $b = k = m = 1$

Ex Elektriskt system (forts)



Sökt

U_c

Lösning

- Strukturering

  Inför lämpliga stödvariabler.

- Basekvationer

  Balansekvationer

  Kirchoff

  $U - U_L - U_R - U_c = 0$

  Konstitutiva Samband

  $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U_R = R \cdot i$, $i = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$, $q = \int_0^t i\,d\tau = \int_0^t C \cdot \frac{dU_c}{dt}\,d\tau = C \cdot U_c$

  $\frac{dq}{dt} = i$, $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}$

- Formulera modell

$$U - L \cdot \frac{d^2q}{dt} - R\frac{dq}{dt} - \frac{1}{C} \cdot q = 0$$

$$\Leftrightarrow L\frac{d^2q}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L} \cdot U$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow s^2Q(s) + \frac{R}{L}sQ(s) + \frac{1}{LC}Q(s) = \frac{1}{L}U(s), \quad Q(s) = C\,U_c(s) \Rightarrow \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = G(s)$$

Minns det mekaniska systemet: $\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$,

$R \to b$

$L \to m$

$C \to \frac{1}{k}$

Tillståndsmodeller

System av 1a ordningens differentialekvationer

Ex Elektrisk krets

Mål: $\dot{x} = f(x, u)$ $\quad x$ – tillståndsvariabel, u – insignal

Välj tillståndsvariabler, ex U_c och i. $\Rightarrow$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \underset{\text{tillståndsvariabel}}{i}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}U_L = \frac{1}{L}(U - U_c - U_R) = \frac{1}{L}(\underset{\text{insignal}}{U} - \underset{\text{tillståndsvariabel}}{U_c} - R\underset{\text{tillståndsvariabel}}{i})$$

Nya variabler: q och i $\Rightarrow$ $\frac{dq}{dt} = i$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}U_L = \frac{1}{L}(U - U_R - U_c) = \frac{1}{L}(U - Ri - \frac{1}{C} \cdot q)$$

$x = f(x, u)$

$y = g(x, u)$

Om tv: U_c & i $\Rightarrow y = U_c$

q & i $\Rightarrow y = \frac{1}{C} \cdot q$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "\text{Intern modell}"] \arrow[rr, bend right, "\text{extern modell}"'] & x \arrow[r, bend left] & y \end{tikzcd}$$

"Hur beror de av varandra?"

Linjära system: $x = Ax + B \cdot u$ $\quad | = [\ ]\,| + |\ \cdot$

$$\Rightarrow \left(\dot{x} =\right) \begin{bmatrix} \frac{dU_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u$$

$y = C \cdot x + D \cdot u$ $\quad \cdot = \text{—}\,| + \cdots$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c \\ i \end{bmatrix} + [0]\,u$$

Intern modell → Extern

$$x = Ax + Bu \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad G(s)$$
$$y = Cx + Du$$

Laplace! ⇒ $sX(s) = AX(s) + BU(s)$ ⇒ $(sI - A)X(s) = BU(s)$ ⇒ $X(s) = (SI - A)^{-1}BU(s)$

$Y(s) = CX(s) + DU(s)$

$$Y(s) = C(SI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = \left(C(SI-A)^{-1}B + D\right)U(s) = G(s)U(s)$$

Ex Elektriskt system

$$x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} x + \underbrace{[0]}_{D} u$$

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D = [1 \quad 0]\left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 0 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} S & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} =$$

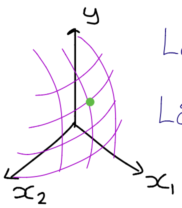
$$[1 \quad 0] \frac{1}{s(s+\frac{R}{L}) + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s+\frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{R}{L} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}{s(s+\frac{R}{L}) + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s(s+\frac{R}{L}) + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Notera: Systemets poler bestäms av $\det(SI - A)$ = egenvärdena till A.

Linjärisering

$$\begin{matrix} x = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

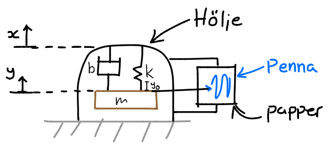
Ex Funktion av flera variabler (2 st)



Lås $x_2 = x_2^\circ$ → "skiva", $y = f(x_1, x_2^\circ) \approx$ taylorutv $\approx f(x_1^\circ, x_2^\circ) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1^\circ, x_2^\circ} \Delta x_1$

Lås $x_1 = x_1^\circ$ → "skiva", $y = f(x_1^\circ, x_2) \approx$ taylorutv $\approx f(x_1^\circ, x_2^\circ) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1^\circ, x_2^\circ} \Delta x_2$

3.2



Givet

x - Jordens läge ($x=0$ i jämnvikt)

y - massans läge ($y=0$ — ıı —)

m = massa

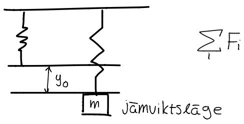
b = dämpkonstant

k = fjäderkonstant

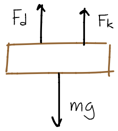
Sökt

$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Lösning



$\sum_i F_i = ma$, Jämvikt => $a=0$



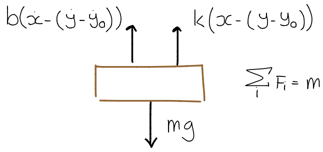
Hooks lag: $F_k = kx$, x = utsträckning = y_0.

$F_d = b \cdot \dot{x}$

$\uparrow$: $F_d + F_k - mg = 0 \Leftrightarrow 0 + Ky_0 - mg = 0 \Leftrightarrow$

$y_0 = \frac{mg}{k}$

Inte jämvikt



$\sum_i F_i = ma = m\ddot{y}$

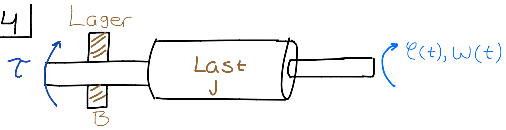
$\uparrow$: $m\ddot{y} = b(\dot{x}-(\dot{y}-\cancel{\dot{y}_0})) + k(x-(y-\cancel{y_0})) - \cancel{mg}$

$m\ddot{y} = b(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y)$

$Y(s)(ms^2+bs+k) = X(s)(bs+k)$

$G(s) = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$

3.4



Sökt

$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{\tau(s)}$

$G_2(s) = \frac{\Phi(s)}{\tau(s)}$

Lösning

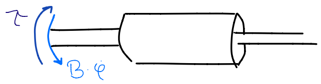
$\sum M = J \cdot \alpha$

α: Vinkelacc

J: Tröghetsmoment

M: Vridande moment

Friläggning

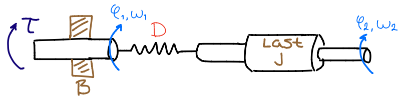


$\circlearrowleft$: $J \cdot \ddot{\varphi} = \tau - B\dot{\varphi} \xRightarrow{\mathcal{L}} Js^2\Phi(s) = \tau(s) - Bs\Phi(s) \Leftrightarrow \Phi(s)(Js^2+Bs) = \tau(s) \Leftrightarrow$

$G_2(s) = \frac{1}{s(Js+B)}$

$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow \Omega(s) = s \cdot \Phi(s) \Rightarrow \frac{\Omega(s)}{\tau(s)} = s \cdot \frac{1}{s(Js+B)} = \frac{1}{Js+B} = G_1(s)$

b)



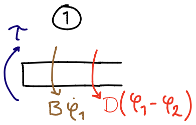
Sökt

$\frac{\Omega_1(s)}{\tau(s)}$, $\frac{\Omega_2(s)}{\tau(s)}$

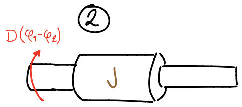
Lösning

Frilägg!

①



②



$J \cdot \alpha = \sum M_i \Rightarrow \circlearrowleft: 0 = \tau - B\dot{\varphi}_1 - d(\varphi_1 - \varphi_2)$

$\mathcal{L} \Rightarrow \quad 0 = \tau(s) - B\Omega_1(s) - \frac{d}{s}(\Omega_1(s) - \Omega_2(s))$

$\circlearrowleft$: $J \cdot \ddot{\varphi}_2 = D(\varphi_1 - \varphi_2)$

$Js\Omega_2(s) = \frac{d}{s}(\Omega_1(s) - \Omega_2(s))$

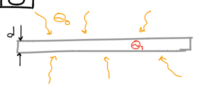
2: $\Omega_2(s)(Js^2+D) = D\Omega_1(s) \Rightarrow \Omega_2(s) = \Omega_1(s)\frac{D}{Js^2+D}$

1: $\Omega_1(s)(Bs+D) = \tau(s) \cdot s + D\Omega_2(s) \Rightarrow \Omega_1(s) = \frac{\tau(s)s + D\Omega_2(s)}{Bs+D}$

$\Big\}$ $\frac{\Omega_1(s)}{\tau(s)} = \frac{Js^2+D}{JBs^2+JDs+BD}$

$\frac{\Omega_2(s)}{\tau(s)} = \frac{D}{s^2JB+DJs+DB}$

3.16)



$q = \sigma(\Theta_0^4 - \Theta_1^4)\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Givet

d: tjocklek $[m]$
ρ: densitet $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
c: Specifikt värme $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$
Θ_0: Ugntemp $[K]$
Θ_1: Plåt temp $[K]$

Sökt

$\frac{\Delta\Theta_1(s)}{\Delta\Theta_0(s)}$

Lösning

Flödesbalans (S.126)

Energiflöde $\left[\frac{J}{s} = W\right]$: Ändring av upplagrad energi per tidsenhet = {Effekt in − Effekt ut}

Energi i plåten: $d \cdot \rho \cdot c \cdot \Theta_1 = [m]\left[\frac{kg}{m^3}\right]\left[\frac{J}{kgK}\right][K] = \left[\frac{J}{m^2}\right]$

$d \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{d\Theta_1}{dt} = \left[\frac{J/s}{m^2}\right] = \left[\frac{W}{m^2}\right]$

$$d\rho c \frac{d\Theta_1}{dt} = \sigma(\Theta_0^4 - \Theta_1^4) \Leftrightarrow \frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{\sigma}{d\rho c}(\Theta_0^4 - \Theta_1^4) = f(\Theta_0, \Theta_1)$$

Vid arbetspunkten Θ antas Jämvikt råda.

$\Theta_{0,0} = \Theta \quad , \quad \Theta_{1,0} = ?$

$f(\Theta_{0,0}, \Theta_{1,0}) = 0$ ty jämvikt.

$$\frac{\sigma}{d\rho c}(\Theta_{0,0}^4 - \Theta_{1,0}^4) = 0 \Rightarrow \Theta_{0,0}^4 = \Theta_{1,0}^4 \Rightarrow \Theta_{0,0} = \Theta_{1,0} = \Theta$$

Arb.pkt $(\Theta_{0,0}, \Theta_{1,0}) = (\Theta, \Theta)$

$$\left.\begin{matrix}\Theta_0 = \Theta + \Delta\Theta_0 \\ \Theta_1 = \Theta + \Delta\Theta_1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\Delta\Theta_0 = \Theta_0 - \Theta \\ \Delta\Theta_1 = \Theta_1 - \Theta\end{matrix} \Rightarrow \Delta\dot{\Theta}_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial\Theta_0}\right|_{(\Theta,\Theta)}\Delta\Theta_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial\Theta_1}\right|_{(\Theta,\Theta)}\Delta\Theta_1 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\Theta_0} = \frac{4\sigma}{d\rho c}\Theta_0^3\Big|_{(\Theta,\Theta)} = \frac{4\sigma}{d\rho c}\Theta^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial\Theta_1} = \frac{-4\sigma}{d\rho c}\Theta_1^3\Big|_{(\Theta,\Theta)} = \frac{-4\sigma}{d\rho c}\Theta^3$$

$$\Delta\dot{\Theta}_1 = \frac{\Theta^3 4\sigma}{d\rho c}(\Delta\Theta_0 - \Delta\Theta_1)$$

Laplace $\Rightarrow \frac{d\rho c}{4\Theta^3\sigma} \cdot s\Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_0 \Rightarrow \frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_0} = \frac{1}{\frac{d\rho c}{4\Theta^3\sigma} \cdot s + 1}$ $\quad T = \frac{d\rho c}{4\Theta^3\sigma}$, högre $\Theta \Rightarrow$ snabbare sys

Modellbyggen

Beskriva systemet matematiskt, vi använde trefasmetoden vilken på ett naturligt sätt mynnar ut i en tillståndsmodell: $\dot{x}=f(x,u)$, $y=g(x,u)$, x= tillståndsvektor, y= utsignal, u= insignal.

Liniär tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned}&Y(s)=G(s)U(s)\\ &\Rightarrow G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D\end{aligned}$$

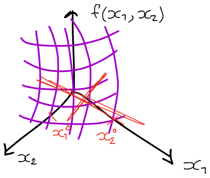
s.99 i boken

Hur linjeriserar vi?

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=g(x,u)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

Ex Funktion i två variabler

$f(x_1,x_2)$



Lås $x_2=x_2^\circ$: $y=f(x_1,x_2^\circ)=[\text{taylorutveckling}]\approx f(x_1^\circ,x_2^\circ)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}\Delta x_1$

Lås $x_1=x_1^\circ$: $y=f(x_1^\circ,x_2)=[\text{taylor}]\approx f(x_1^\circ,x_2^\circ)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}\Delta x_2$

Kombinera ihop: $f(x_1,x_2)\approx f(x_1^\circ,x_2^\circ)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x_0}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{x_0}\Delta x_2$ $x_0=(x_1^\circ,x_2^\circ)$

$$f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{bmatrix}\approx f(x_0)\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_0}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x_0}\end{bmatrix}}_{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x_0}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix}}_{\Delta x}$$

Till sist: $\dot{x}=f(x,u)$: $f(x,u)\approx f(x_0,u_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,u_0)}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,u_0)}\Delta u$

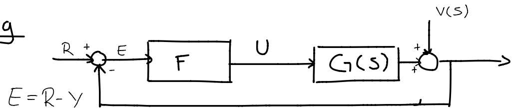
Tips: Välj (x_0,u_0) som en stationär punkt (en punkt där $\dot{x}(t)=0$) $\Rightarrow f(x_0,u_0)=0$ om $\begin{pmatrix}u=u_0\\ x=x_0\end{pmatrix}$.

Linjäriserad tillståndsmodell

$$\Delta\dot{x}(t)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,u_0)}}_{A}\Delta x+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,u_0)}}_{B}\Delta u$$

$$\Delta y(t)=\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,u_0)}}_{C}\Delta x+\underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(x_0,u_0)}}_{D}\Delta u$$

Återkoppling



Vi använder återkoppling för att: - minska effekten av osäkerhet (ex störningar, parametervariationer)
- forma dynamiken (snabba upp, stabilisera)

P-regulator

$U = K_P E = K_P(R - Y)$, $F(s) = K_P$

Ex 1a ordningens system

$G(s) = \frac{K}{1+sT}$

$\frac{1}{ms+b} = \frac{1/b}{1+\frac{m}{b}s}$

$$Y(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} R(s) = \frac{K_P K}{1+K_PK+sT} R(s) = \frac{\overbrace{\frac{K_PK}{1+K_PK}}^{K_c = \text{closed loop}}}{1+s\underbrace{\frac{T}{1+K_PK}}_{T_c}} \cdot R(s) = \frac{K_c}{1+sT_c} R(s)$$

Vi ser att en ökning av Kp ger en minskning av Tc och får således ett snabbare system.

Kvarstående fel är också något att beakta.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+FG}\right)R(s) = \left\{R(s) = \frac{r_0}{s}\right\} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+FG}\right)\frac{r_0}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{r_0}{1+FG} = \frac{r_0}{1+F(0)G(0)} = \frac{r_0}{1+K_PK}$$

Så att öka Kp ger ett minskat kvarstående fel.

Styrsignalaktiviteten, $U_0 = \lim_{t\to 0} U(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot U(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot R(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{F(s)\cdot r_0}{1+F(s)G(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K_P(1+sT)\cdot r_0}{1+K_PK+sT} \rightarrow K_P \cdot r_0$.

Att öka Kp ger större styrsignal. Då får man passa sig så inte systemet går sönder.

Störning: Kvarstående fel på utsignalen vid stegformad processtörning. $V(s) = \frac{V_0}{s}$

$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \ldots = \frac{V_0}{1+K_PK}$

Om Kp ökar minskar störningens inverkan.

Summering

Kp ökar ⇒ Snabbare system
minskning av kvarstående felet
Större styrsignal
minskad störningsinverkan

Tillståndsmodeller

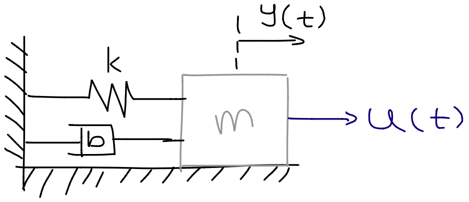
$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$, $x(t)$: tillståndsvektor $n\times1$

$y(t) = Cx(t)+Du(t)$ $\quad u(t)$: insignalsvektor $m\times1$

$y(t)$: utsignalsvektor $p\times1$

Dimensioner: $A: n\times n$, $B: n\times m$

$C: p\times n$ $\quad D: p\times m$



$\longrightarrow$: $m\ddot{y} = u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t)$

$(ms^2+bs+k)Y(s) = U(s)$

$G(s) = \frac{1}{ms^2+bs+k}$

Tillståndsekvation

$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$ $\quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}y(t) - \frac{b}{m}\dot{y}(t) = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Notera: Tillståndsvariablerna väljs som $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}, \ldots$ upp till grad $n-1$.

2.1

a)

Givet

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$

u: insignal

y: utsignal

Sökt

Systemet på tillståndsform

Lösning

$x_1 = y \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$x_2 = \dot{y} \quad\quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\dot{y} + u = -x_2 + u$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

c)

Givet

$\begin{cases} 4\dot{v}(t) + 5v(t) = 2u(t) \\ \dot{y}(t) + 2y(t) = 5v(t) \end{cases}$

Sökt

Tillståndsmodell

$x_1 = y \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = -2y + 5v = -2x_1 + 5x_2$

$x_2 = v \quad\quad \dot{x}_2 = \dot{v} = -\frac{5}{4}v + \frac{1}{2}u = -\frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{2}u$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1.25 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

2.4

Givet

$\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}u(t)$$

Sökt

$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s-2 & 0\\ 3 & s-4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+1=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\det(sI-A)}\begin{bmatrix}s-4 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+1=$$

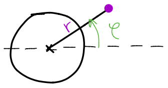
$$\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{(s-2)(s-4)}\begin{bmatrix}s-4\\ -3+2(s-2)\end{bmatrix}+1=\frac{1}{(s-2)(s-4)}\Big(2(s-4)-1(-3+2(s-2))\Big)+1=$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-4)}(-8+3+4)+1=\frac{-1+(s-2)(s-4)}{(s-2)(s-4)}=\frac{s^2-6s+7}{(s-2)(s-4)}$$

2.11

Givet

$$\omega_0=\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\ \frac{\text{rad}}{s}$$



① $\ddot{r}(t)+\frac{k}{r^2(t)}-r(t)\omega^2(t)=u_1(t)$

② $\frac{1}{r(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2(t)\omega(t)\right)=u_2(t)$

k: gravitationskonstant

u_1, u_2: radiella resp tangentiella styrkrafter

Sökt

a) Tillståndsmodell

b) Linjärisera modellen, hitta eigenvalues

a) $x_1=r$, $x_2=\dot{r}$, $x_3=\omega$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{r}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{r}=-\frac{k}{r^2}+r\cdot\omega^2+u_1=\frac{-k}{x_1^2}+x_1\cdot x_3^2+u_1\\ \dot{x}_3=\dot{\omega}=\{\text{derivera uttryck } 2\}=\frac{-2\dot{r}\omega+u_2}{r}=-\frac{2x_2x_3}{x_1}+\frac{u_2}{x_1}\end{cases}$$

b) Tillståndsderivator är 0 i arbpkt.

$u_{10}=u_{20}=0$

Linjärisering: $\Delta\dot{x}=A\Delta x+B\Delta u$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}\end{bmatrix}$$

(x_0, u_0): arbpkt

$$0=x_{20}$$

$$0=-\frac{k}{x_{10}^2}+x_{10}x_{30}^2+\overset{=0}{u_{10}}\Rightarrow x_{10}=\sqrt[3]{\frac{k}{x_{30}^2}}\Rightarrow x_0=\begin{bmatrix}\sqrt[3]{\frac{k}{x_{30}^2}}\\ 0\\ \omega_0\end{bmatrix}$$

$$0=-\frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}}+\frac{u_{20}}{x_{10}}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{2k}{x_{10}^3}+x_{30}^2 & 0 & 2x_{10}x_{30}\\ \frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}^2}-\frac{u_{20}}{x_{10}^2} & -\frac{2x_{30}}{x_{10}} & -\frac{2x_{20}}{x_{10}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3\omega_0^2 & 0 & 2\sqrt[3]{k\omega_0}\\ 0 & -2k^{-1/3}\cdot\omega_0^{5/3} & 0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{\omega_0^2}\right)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

$$\det(SI - A) = \det(\lambda I - A) = 0$$

$$\omega_0^{6/3} = \omega_0^2$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & -2(k\omega_0)^{1/3} \\ 0 & 2k^{-1/3}\omega_0^{5/3} & \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^3 - 3\omega_0^2\lambda + \lambda 4\cancel{k}^{-1/3}\omega_0^{5/3}(\cancel{k}\omega_0)^{1/3} = 0$$

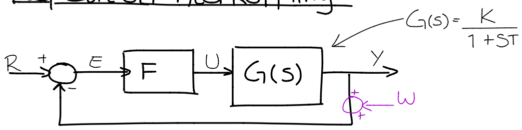
$$\lambda^3 - 3\omega_0^2\lambda + 4\omega_0^2\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + \omega_0^2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$$

Repetition Återkoppling



$G(s) = \frac{K}{1+sT}$

P-regulator: $F(s) = K_p \Rightarrow U(s) = K_p(E(s)) = K_p(R(s) - Y(s))$

Om Kp ökar: Snabbare system
Minskning av kvarstående fel. (Alltid ett kvarstående fel)
Minska inverkan från störningar
Större styrsignal
Större känslighet för mätbrus.

Kvarstående fel kan tas bort med I-verkan.

PI-regulator: $F(s) = \frac{K_p \cdot s + K_i}{s} \Rightarrow U(s) = K_p \cdot E(s) + \frac{K_i}{s} \cdot E(s)$, $\frac{Y(s)}{R(s)} = \ldots = \frac{\frac{K}{T}(K_p s + K_i)}{s^2 + \frac{1+K_pK}{T} \cdot s + \frac{K_iK}{T}}$

Kan jmf med generellt 2:a ordningens system. $G(s) = \frac{*}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{K_iK}{T}}$, $\zeta = \frac{1+K_pK}{2T\omega_n}$

Om Kp ökar, Ki fix: Större dämpning, ζ ökar.
Om Ki ökar, Kp fix: Snabbare system, ω_n ökar, men dämpningen minskar.

PID-regulator: $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$, $\frac{Y(s)}{R(s)} = \ldots = \frac{\frac{K(K_p s + K_i + K_d s^2)}{(T + K_d \cdot K)}}{\underbrace{s^2 + \frac{1+K_p \cdot K}{T+K_d \cdot K} s + \frac{K_i \cdot K}{T+K_d \cdot K}}_{\text{Ytterligare frihetsgrader}}}$

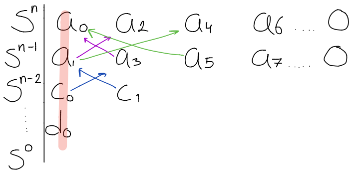
Kd ökar: Systemet blir snabbare
Systemet blir än mer känsligt för mätstörningar.

Stabilitet

Huruvida ett system är stabilt eller ej kan bestämmas mha:
- Lösa karaktäristiska eku. $1+L(s)=0$
- Simulera
- Routh-Hurwitz
- Rotort (s.224)
- Nyquistkriteriet

Routh-Hurwitz

KE: $1 + L(s) = 0 \Rightarrow a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots = 0$



$$\begin{array}{c|ccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \ldots & 0 \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \ldots & 0 \\ s^{n-2} & c_0 & c_1 & & & \\ \vdots & d_0 & & & & \\ s^0 & & & & & \end{array}$$

$c_0 = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_1}$

$c_1 = \frac{a_1 a_4 - a_5 a_0}{a_1}$

$d_0 = \frac{c_0 a_3 - c_1 a_1}{c_0}$

Om alla har samma tecken => Stabilt!
Antal teckenväxlingar => Antalet poler!

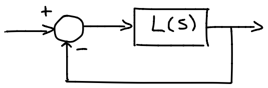
Ex $3s^4 + 2s^3 - s + 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 3 & 0 & 2 \\ s^3 & 2 & -1 & 0 \\ s^2 & a & b & 0 \\ s & -\frac{7}{3} & 0 & 0 \\ s^0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = \frac{2 \cdot 0 - (-1 \cdot 3)}{2} = \frac{3}{2} \\ b = \frac{2 \cdot 2 - 0 \cdot 3}{2} = 2 \end{array}$$

Teckenväxling, 2 ggr! Instabilt med två poler i HHP.

Matlab: roots => $-0.85 \pm 0.70i$
$0.52 \pm 0.53i$

Nyquistkriteriet



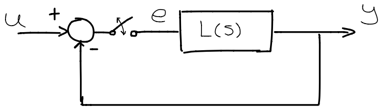
$L(s) = F(s)G(s)$

KE: $1 + L(s) = 0$

Frekvenstroget LTI-system

Om vi skickar in en sinussignal i ett LTI-system kommer utsignalen vara $y = |L(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \phi)$ $\phi = \arg\{L(j\omega)\}$. Alla LTI-system är frekvenstrogna och detta nyttjar Nyquistkriteriet.

Tankeexperiment

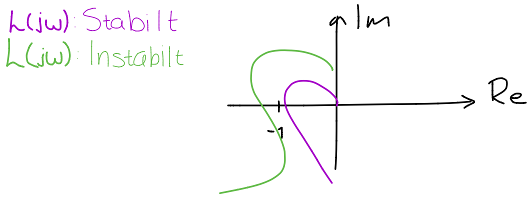


1. Injicera störningen $e(t) = \sin(\omega t)$
2. Invänta stationäritet (kräver att $L(s)$ = stabilt)
   $y(t) = |L(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \arg\{L(j\omega)\})$
3. Koppla om switchen, har vi självsvängning?
   Om signalen försvinner är systemet stabilt.
   Vi får självsvängning om $|L(j\omega)| = 1$ och $\arg\{L(j\omega)\} = -\pi = -180°$.

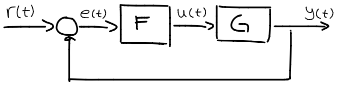
   Om: $|L(j\omega)| < 1$ => Stabilt
   $|L(j\omega)| > 1$ => Instabilt
   $|L(j\omega)| = 1$ => Marginellt stabilt.

Det faktiska kriteriet (fast förenklat)

Om $L(s)$ är stabilt (ok med poler på imaginäraxeln) så är det återkopplade systemet $1 + L(s)$ stabilt om $L(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$ passerar till höger om den kritiska punkten: -1.



Återkopplade System

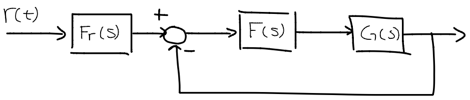


$L(s) = F(s)G(s)$

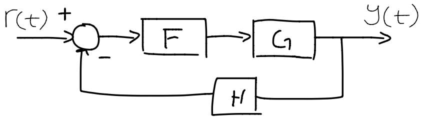
$G_{ry}(s) = \frac{D(s)}{1+L(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$

Polerna ges av: $1+L(s)=0$
Detta kallas karaktäristiska ekvationen.

Observera

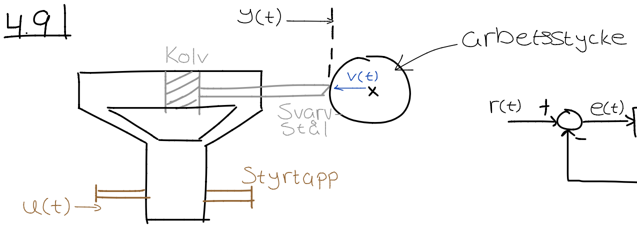


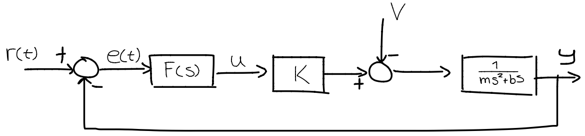
$\Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{F_r(s)F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$



$G_{ry}(s) = \frac{FG}{1+FGH}$

4.91





Sökt

Kvarstående fel vid konstant $v(t)=V_0$ för a) p-reg
b) PI-reg

Lösning

$$G_{ve}(s) = \frac{E(s)}{V(s)} = \frac{\text{Fram}}{1+\text{Krets}} = \frac{D(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{1}{ms^2+bs}}{1+F(s)K\cdot\frac{1}{ms^2+bs}} = \frac{1}{ms^2+bs+F(s)K}$$

$$V(s) = \frac{V_0}{s}$$

a) $F(s) = K_p \Rightarrow E(s) = \frac{1}{ms^2+bs+K_p K}\cdot\frac{V_0}{s}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \cancel{s}\left(\frac{1}{ms^2+bs+K_pK}\cdot\frac{V_0}{\cancel{s}}\right) = \frac{V_0}{K_pK}$$

b) $F(s) = \frac{K_p\cdot s+K_i}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{ms^2+bs+K\left(\frac{K_ps+K_i}{s}\right)}\cdot\frac{V_0}{s} = \frac{V_0}{ms^3+bs^2+K(K_p\cdot s+K_i)}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{s\cdot V_0}{ms^3+bs^2+K(K_p\cdot s+K_i)} = \bigcirc$$

4.24

Givet

$G(s) = \frac{1}{s}$

$F_{PI}(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = K\left(1+\frac{1}{s}\right)$

K bestäms så ~~att~~ det återkopplade systemets relativa dämpning $\zeta = 0.3$.

Sökt

$t_{5\%}$

Lösning

$t_{5\%} = \frac{3}{a}$, $s = -a \pm j\omega_d$

$L(s) = F(s)G(s) = K\left(1+\frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{s} = \frac{K(s+1)}{s^2}$

$1+L(s) = 0 \iff 1+\frac{K(s+1)}{s^2} = 0 \iff s^2+Ks+K=0$ ①

Jmf med: $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K}$, $2\zeta\omega_n = K \Rightarrow K = 0.36$

Insättning av K i ① $\Rightarrow s^2+0.36s+0.36=0$

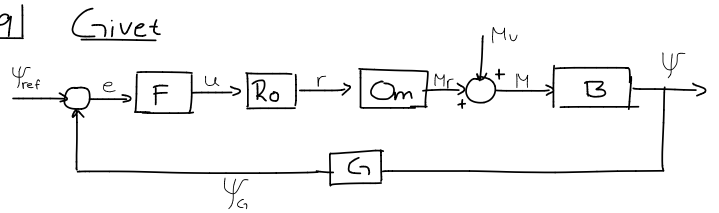
$$(s+0.18)^2 = 0.18-0.36$$

$$s = -0.18 \pm \sqrt{0.18^2-0.36} = -0.18 \pm j0.57$$

$$t_{5\%} = \frac{3}{0.18} \hat{=} 17s$$

4.19

Givet



F: Fartyg
Ro: Roderservo
Om: Omvandlingsfaktor
B: Fartyg (Båt)
G: Givare
ψ: Kursvinkel
Mv: Vridmoment pga störningar
Mr: — " — roderverkan
M: — " — tot
u: Spänning
e: felsignal
ψ_G: mätsignal från givare
r: rodervinkel

F . $u = 0.5e$
Ro: $5\dot{r}+r = 0.1u$
B: $100\ddot{\psi}+\dot{\psi} = 0.1M$
G: $\psi_G = 0.1\psi$
Om: 10^3

Sökt

$L(s)$, $G_{\psi_r\psi}$, $G_{M_v\psi}$

$L(s) = F(s)R_o(s)Om(s)B(s)G(s)$

$G_{\psi_r\psi}(s) = \frac{D(s)}{1+L(s)} = \frac{F(s)R_o(s)Om(s)B(s)}{1+F(s)R_o(s)Om(s)B(s)G(s)}$

$G_{M_v\psi}(s) = \frac{D(s)}{1+L(s)} = \frac{B(s)}{1+L(s)}$

4.25

Givet

$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{Ts}\right)$

$G(s) = \frac{3}{1+2s}$

Sökt

a) Bestäm K, T s.a. det slutna systemet får en dubbelpol i $s=-1$.

Lösning

Polpolynomet: $P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) = 0$, n: antalet poler.

Dubbelpol, $s=-1$, $\Rightarrow n=2 \Rightarrow P(s) = (s-(-1))(s-(-1)) = (s+1)^2 = s^2+2s+1=0$

Karaktäristiska ekuationen: $1+L(s)=0 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{1+2s} \cdot K\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+2s)Ts+3K(Ts+1)}{(1+2s)Ts} = 0 \Leftrightarrow$

$(1+2s)Ts + 3K(Ts+1) = 0 \Leftrightarrow s^2 2T + s(T+3TK) + 3K = 0 \Leftrightarrow$

$s^2 + s\frac{(1+3K)}{2} + \frac{3}{2}\frac{K}{T} = 0$

Jmf med $P(s)$!

$$\begin{cases} \frac{1+3K}{2} = 2 \Rightarrow K=1 \Rightarrow \\ \frac{3}{2}\frac{K}{T} = 1 \qquad T = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$F(s) = 1\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}s}\right)$

b) **Sökt**

Det slutna systemet ska få $\xi = 0.7$, $\omega_n = 1$

Lösning

Jmf koeff i KE med koeff i $s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 =$

$$\begin{cases} \frac{1+3K}{2} = 2\xi\omega_n \Rightarrow K = 0.6 \Rightarrow \\ \frac{3}{2}\frac{K}{T} = \omega_n^2 \qquad T = 0.9 \end{cases}$$

$F(s) = 0.6\left(1 + \frac{1}{0.9s}\right)$

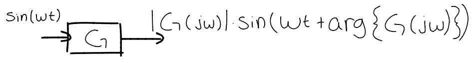
Repetition

Föregående föreläsning kollade vi på olika sätt att kolla huruvida ett slutet system är stabilt eller ej. Detta gjorde vi genom:

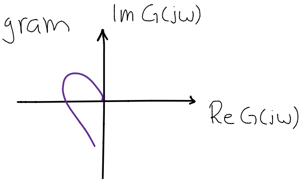
- Lösa KE. $1+L(s)=0$ (Vi söker poler i VHP)
- Simulera
- Routh-Hurwitz, relaterar till K.E: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots = 0$ Syftar inte till att lösa KE, utan till att finna om det finns poler i HHP, samt hur många.
- Rotort (finns i boken)
- Nyquistkriteriet (förenklade och fullständiga)

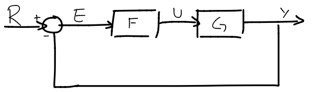
Frekvenstrogenhet

"Sinus in ger (förstärkt och fasförskjuten) sinus ut."



Frekvens-/
Nyquistdiagram

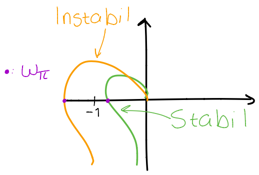




Stabilt om $|L(jw_\pi)|<1$

Instabilt om $|L(jw_\pi)|>1$

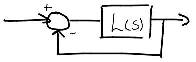
(Marginellt stabil om $=1$)



Förenklade NK

Om $L(s)$ är stabil (inga poler i HHP) är det återkopplade systemet $(1+L(s))$ stabilt om frekvenskurvan passerar till höger om den kritiska punkten $(-1,0)$.

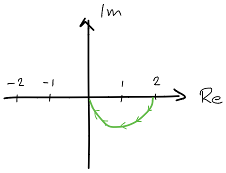
Ex $L(s) = \frac{2}{3s+1}$



$L(s)$ Stabil, Pol i $-\frac{1}{3}$.

Rita Nyquistdiagrammet => $L(jw) = \frac{2}{3jw+1} = \frac{2(1-3jw)}{(1+3jw)(1-3jw)} = \frac{2}{1+9w^2} + j\frac{6w}{1+9w^2}$

W	Re	Im
0	2	0
0.1	1.83	-0.55
0.33	1	-1
∞	0	0



Nyquists förenklade kriteriet säger att det slutna systemet är stabilt.

Stabilitetsmarginaler

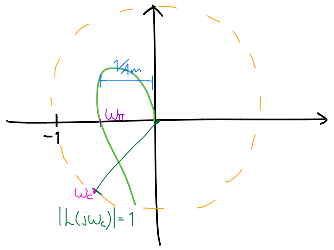
Hur säker är vår stabilitet för modellfel? ← VIKTIGT!

ω_π, den frekvens som $L(j\omega)$ skär reella axeln.

Am: Amplitud marginal

$A_m = \frac{1}{|L(j\omega)|}$, $|L(j\omega)| = \frac{1}{A_m}$

Hur mycket förstärkning tål vårt system utan att bli instabilt.



ω_c: den frekvens som $|L(j\omega_c)| = 1$

φ_m: fasmarginal

$\varphi_m = 180 + \arg\{L(j\omega_c)\}$

"Hur mycket extra fasförskjutning tål vårt system utan att bli instabilt?"

Förenklade Nyquistkriteriet förutsätter att $L(s)$ är stabilt. I labben är ju dock $L(s)$ instabilt, detta kräver att vi använder det fullständiga N-K.

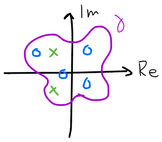
Nyquists Fullständiga Kriterium

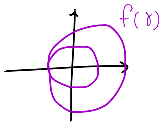
Bygger på argumentvariationsprincipen...

Antag att:
1) γ är en sluten kurva i det komplexa talplanet.
2) $f(z)$ är en rationell funktion av två polynom, $f(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}$, där Q och R saknar gemensamma faktorer.
3) $Q(z) \neq 0$ och $R(z) \neq 0$ för alla punkter på γ.
4) Antal nollställen är Z och antalet poler är P inom γ.

Då är $\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi(Z - P) = 2\pi N$

där $N \equiv$ antal varv som $f(\gamma)$ roterar.





Tillämpning

$f(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{N(s)+T(s)}{N(s)}$

rationell funktion

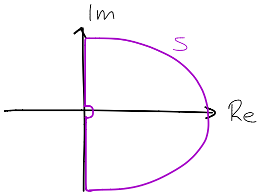
Poler till det öppna sys $L(s)$

Poler till det slutna Systemet

$\Rightarrow Z - P \equiv$ (Poler till det slutna systemet) − (Poler öppna) $=$

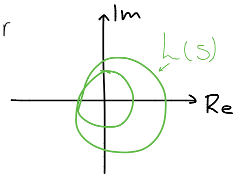
$N \equiv$ (antal varv, medsols kring 0 för $1 + L(s)$).

Det är intressant att kika HHP!



HHP $\equiv \gamma = S$

Nyquistkontur

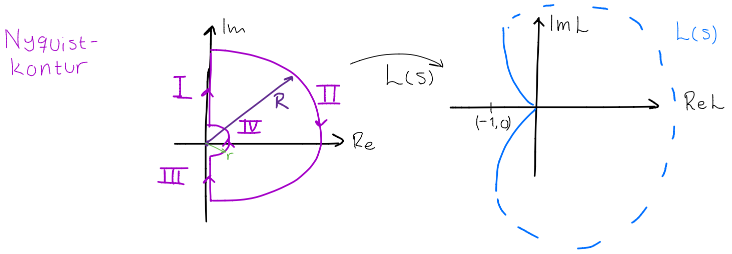


$\Rightarrow Z = P + N$

Om $Z = 0 \Rightarrow$ Stabilt sys.

N är även antal varv kring −1 för $L(s)$.

Nyquistkriteriet



I: $S = jw$, $w: 0 \to \infty$
II: $S = Re^{j\theta}$, $R \to \infty$, $\theta = [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$
III: $S = -jw$, $w: \infty \to 0$
IV: $S = re^{j\theta}$, $r \to 0$, $\theta = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

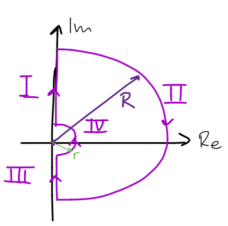
Z= #poler i HHP för det återkopplade systemet.
P= #Poler i HHP för L(s).
N= #varv som den avbildade kurvan gör medurs kring (-1,0).

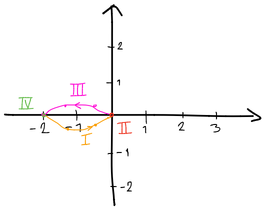
5.13 a)

Skissa Nyquistkontur i L(s)-planet för $L(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$

Steg 1: Bestäm P!
P=1 (s=1 är en pol)

Steg 2: Avbilda de 4 områdena i Nyquist kontur m. L(s).





I: $S = jw$, $w: 0 \to \infty$
II: $S = Re^{j\theta}$, $R \to \infty$, $\theta = [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$
III: $S = -jw$, $w: \infty \to 0$
IV: $S = re^{j\theta}$, $r \to 0$, $\theta = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$I: \; L(jw) = \frac{4}{(jw-1)(jw+2)} = \frac{4(-jw-1)(-jw+2)}{(jw-1)(-jw-1)(jw+2)(-jw+2)} = -\frac{4(w^2+2)}{(1+w^2)(4+w^2)} - j\frac{4w}{(1+w^2)(4+w^2)}$$

w	Re{L}	Im{L}
0	-2	0
1	-1.2	-0.4
2	-0.6	-0.2
4	-0.2	-0.04
∞	0	0

II: Förenkla för stora s: $L(s) = \frac{4}{s^2}$, $L(Re^{j\theta}) \to 0 |_{R \to \infty}$

III: Använd I, vi har motsatt riktning och en spegling i Re-axeln av område I.

IV: För små s: $L(s) = \frac{4}{(-1)(2)} = -2$

Steg 3: Studera avbildningen. Hur många ggr omslingras (-1,0) i medurs riktning?
Vi går moturs → $\ominus$1 ggr! => N=-1

Z= P+N = 1-1=0 => Det återkopplade systemet har inga poler i HHP => Återkopplade sys är stabilt.

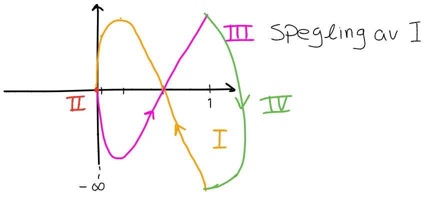
5.13 b) $L(s) = \frac{2+s}{s(2-s)}$

Steg 1: $P=1 \quad (s=2)$

Steg 2: I: $s=j\omega,\ \omega: 0 \to \infty$

$$L(j\omega) = \frac{2+j\omega}{j\omega(2-j\omega)} = \frac{(2+j\omega)(2+j\omega)(-j\omega)}{j\omega(2-j\omega)(-j\omega)(2+j\omega)} = \frac{(-j\omega)(2+j\omega)^2}{\omega^2(4+\omega^2)} = \frac{4}{4+\omega^2} - j\frac{4-\omega^2}{\omega(4+\omega^2)}$$

ω	0	2	4	10	∞
Re L	1	½	0.2	0.03	0
Im L	$-\infty$	0	0.6	0.4	0



II: $s = Re^{j\theta},\ R \to \infty,\ \theta: \frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{\pi}{2}$

Stora $s \Rightarrow L(s) = \frac{s}{s(-s)} \to 0\,\big|_{R\to\infty}$

IV: $s = re^{j\theta},\ r \to 0,\ \theta: -\frac{\pi}{2} \circlearrowleft \frac{\pi}{2}$

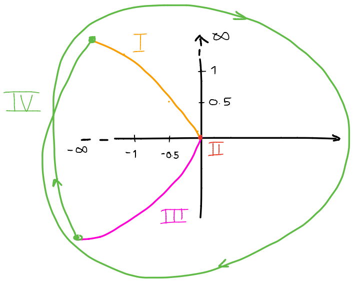
För små s gäller: $L(s) = \frac{2}{2s} = \frac{1}{s}$

$$L(re^{j\theta}) = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta} = \begin{cases} \frac{1}{r}e^{j\frac{\pi}{2}}, & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{r}e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vi snurrar från $\frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow 0.5$ varv.

Vid passagen av område IV från $-\frac{\pi}{2} \circlearrowleft +\frac{\pi}{2}$ gör avbildningen en rotation från $+\frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{\pi}{2}$.

Steg 3: $N=0 \Rightarrow Z = P+N = 1+0 = 1 \Rightarrow$ Instabilt!



5.13 c) $L(s) = \frac{1}{s^3(1-s)}$

Steg 1: $P=1,\ s=1$

Steg 2:

I: $s=j\omega,\ \omega: 0 \to \infty,\ L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3(1-j\omega)} = \frac{(-j\omega)^3(1+j\omega)}{\omega^6(1+\omega^2)} = \frac{(j\omega)^3(1+j\omega)}{\omega^6(1+\omega^2)} = \frac{j(1+j\omega)}{\omega^3(1+\omega^2)} = -\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} + j\frac{1}{\omega^3(1+\omega^2)}$

ω	0	0.75	1	2	∞
Re	$-\infty$	-1.1	-0.5	-0.05	0
Im	$+\infty$	1.5	0.5	0.02	0

II: $s = Re^{j\theta},\ R \to \infty,\ \theta: +\frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{\pi}{2}$

För stora s: $L(s) = -\frac{1}{s^4} \to 0\,\big|_{R\to\infty}$

III: $s = re^{j\theta},\ r \to 0,\ \theta: -\frac{\pi}{2} \circlearrowleft \frac{\pi}{2}$

Små $s \Rightarrow L(s) = \frac{1}{s^3}$

$$L(re^{j\theta}) = \frac{1}{r^3e^{3j\theta}} = \frac{1}{r^3}e^{-j3\theta} = \begin{cases} \frac{1}{r^3}e^{j\frac{3\pi}{2}}, & \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \frac{1}{r^3}e^{\frac{-j3\pi}{2}}, & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Rotation på $\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi \Leftrightarrow 1.5$ varv

Steg 3: $N=2 \Rightarrow Z = P+N = 1+2=3 \Rightarrow$ Instabilt!

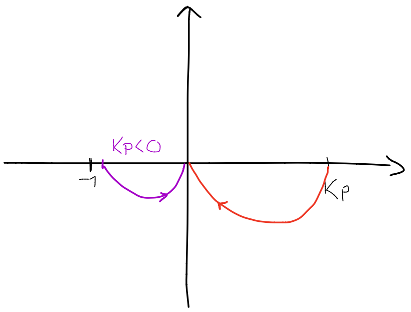
Frekvensanalys

Ex Nyquistdiagram,

$F(s)=K_p, \quad G(s)=\frac{1}{1+sT} \Rightarrow L(s)=F(s)G(s)$

$$L(jw)=\frac{K_p}{1+jwT}=\frac{K_p(1-jwT)}{(1+jwT)(1-jwT)}=\frac{K_p}{1+(wT)^2}-j\frac{K_pwT}{1+(wT)^2}$$

w	0	α	β	γ	∞
Re	K_p	$+a$	$+b$	$+c$	0
Im	0	$-g$	$-f$	$-h$	0



Systemet är stabilt för $K_p>-1$.

Bodediagram

Ett annat sätt att studera systemegenskaper där vi även får in frekvensberoende är bodediagram.

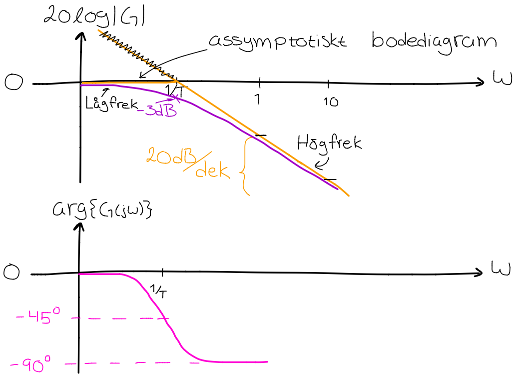
Man studerar i dessa: $\begin{cases} 20\log|G(jw)| \\ \arg\{G(jw)\} \end{cases}$

Ex

$G(s)=\frac{1}{1+sT}, \quad G(jw)=\frac{1}{1+jwT}$

$wT \ll 1 \Rightarrow G(jw)\approx 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 20\log|G(jw)|=20\log(1)=0 \text{ dB} \\ \arg\{G(jw)\}=0 \end{cases}$

$wT \gg 1 \Rightarrow G(jw)\approx \frac{1}{jwT} \Rightarrow \begin{cases} 20\log|G(jw)|=20\log(\frac{1}{wT}) \\ \arg\{G(jw)\}=-\arctan(wT)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$



$w=\frac{1}{T}$: Brytfrekvens.

$|G(j\frac{1}{T})|=|\frac{1}{1+j}|=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$20\log|G(j\frac{1}{T})|=-3\text{dB}$

Viktig motivering

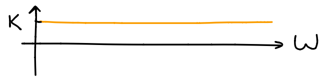
Anta $G(s)=\frac{T_1(s)T_2(s)\cdots}{N_1(s)N_2(s)\cdots\cdots} \Rightarrow$ 1) $\log|G|=\sum_{k=1}(\log|T_k(jw)|-\log|N_k(jw)|) \Rightarrow$ Summera bidrag i Bodediagram.

2) $\arg\{G(jw)\}=\sum_{k=1}(\arg\{T_k(jw)\}-\arg\{N_k(jw)\}) \Rightarrow$ Summera bidrag i Bodediagram.

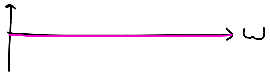
Vilka faktorer är intressanta att studera?

① $G(s)=K$

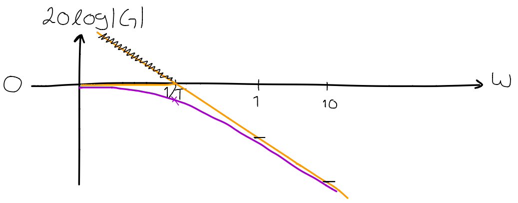
$|G|=K$

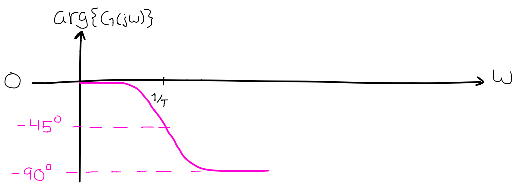


$\arg\{G\}=0$



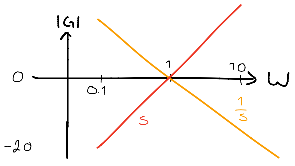
② $G(s)=\frac{1}{1+sT}$ (samma som ovan)

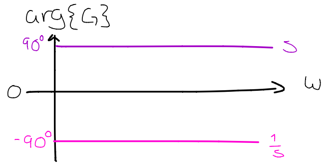




③ $G(s)=\frac{1}{s}$, samt $G(s)=s$

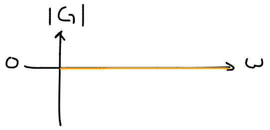
$20\log|G(j\omega)| = -20\log(\omega)$ $\quad$ $\arg\{G(j\omega)\} = -\arctan(\frac{\omega}{0}) = -\frac{\pi}{2}$

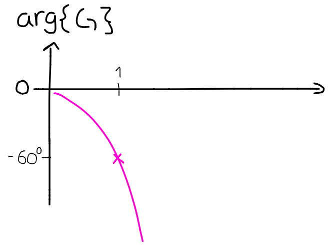




④ $G(s)=e^{-sT}$ (tidsfördröjning av en signal)

$20\log|G(j\omega)| = 20\log(1) = 0$ $\quad$ $\arg\{G(j\omega)\} = -\omega T$

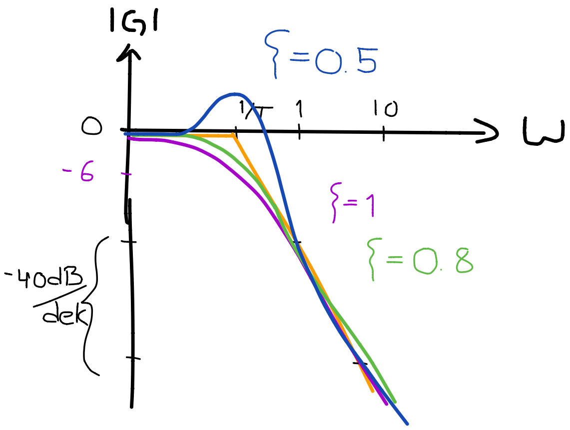


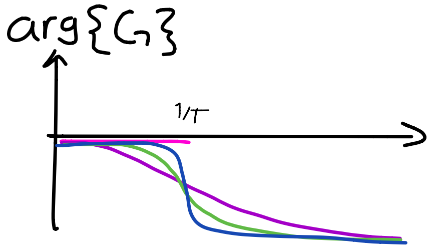


⑤ $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{1+2\zeta Ts+s^2T^2}$, $T=\frac{1}{\omega_n}$, $0<\zeta<1$

$\omega T \ll 1$: $20\log|G(j\omega)|=0$
$\arg\{G(j\omega)\}=0$

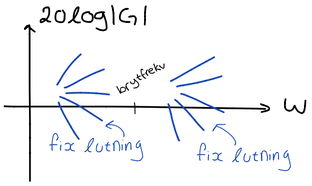
$\omega T \gg 1$: $20\log|G(j\omega)| \approx 40\log\frac{1}{T} - 40\log\omega$
$\arg\{G(j\omega)\} = -180°$

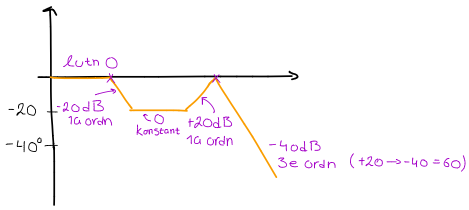




Sammanställning

Alla bidrag ser i princip ut som:





Många brytpunkter: Börja från vänster, gör tabell för argumenten.

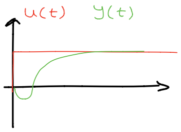
Frekvensanalys – Bodediagram

$G(s) = 1$ $\qquad 20\log|G(j\omega)| = 0 \qquad \arg\{G(j\omega)\} = 0$

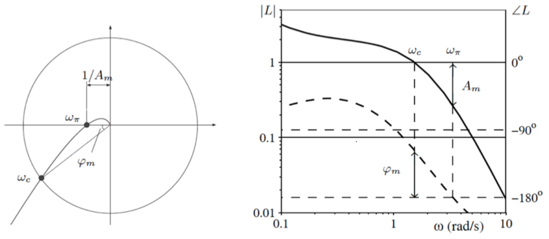
$G(s) = \frac{1-sT}{1+sT} \Rightarrow$ —— " —— $= 0 \qquad$ —— " —— $= -2\arctan(\omega T)$

$G(s) = e^{-sT}$ —— " —— $= 0 \qquad = -\omega T$

$\frac{1-sT}{1+sT}$ kallas "icke-minumfas" sytem. Dessa system har nollställe i ~~HHP~~.



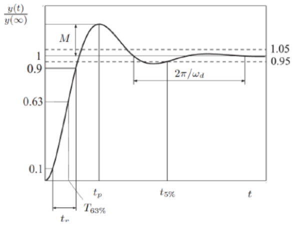
Stabilitetsmarginaler



Specifikationer i tidsplanet

Begrepp som är viktiga för att beskriva insvängningen av ett stegsvar:

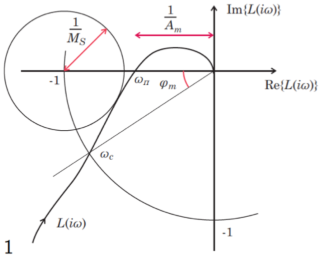
- *Stigtiden* t_r (eng. *rise time*)
- *Insvängningstiden* $t_{5\%}$ (*settling time*)
- *Ekvivalent tidskonstant* $T_{63\%}$
- *(Relativ) översläng* M (*overshoot*)
- *Dämpad självsvängningsfrekvens* $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$



Specifikationer i frekvensplanet

Fasmarginal

$\varphi_m = 180° + \arg L(i\omega_c)$



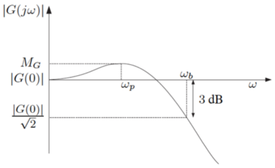
Amplitudmarginal

$A_m = 1|L(i\omega_\pi)|$

Max känslighetsfunktion

$\max_\omega |S(j\omega)| < M_S, \quad S = \frac{1}{1+L}$

Specifikationer i frekvensplanet

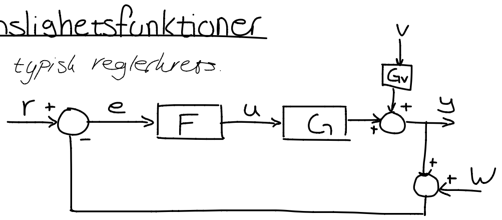


- *Maxvärde* eller *resonanstopp* $M_G = \max_\omega |G(i\omega)|$
- Resonanstoppen ligger vid *resonansfrekvensen* ω_p: $|G(i\omega_p)| = M_G$
- *Bandbredden* ω_b definieras av

$$\frac{|G(i\omega_b)|}{|G(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

Känslighetsfunktioner

En typisk reglerkrets.



$L(s) = F(s)G(s)$ (Kretsöverföring)

Vi har möjlighet att påverka systemet genom att modellera F(s), regulatorn.

G(s) är vår modell eller verkliga Process.

Definiera känslighetsfunktioner: $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$

Komplementära KF: $T(s) = 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1+L(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$

$$Y(s) = T(s)\big(R(s) - W(s)\big) + S(s)G_v(s)V(s)$$
$$E(s) = S(s)\big(R(s) - W(s) - G_v(s)V(s)\big)$$
$$U(s) = F(s)S(s)\big(R(s) - W(s) - G_v(s)V(s)\big)$$

Regulatordimensionering handlar alltså om att bestämma: $S(s), T(s), G_v(s)S(s), F(s)S(s)$

Uppgifter för återkopplingen

① Att utsignalen följer vår referenssignal (r=y)

$Y(s) = T(s)R(s) \Rightarrow Y(s) = R(s) \Rightarrow T(s) = 1$

$E(s) = S(s)R(s) \Rightarrow S(s) = 0 \quad (T(s) = 1 - S(s) = 1 - 0 = 1)$

Ex $r(t) = \sigma(t) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s(S(s)R(s)) = S(0) = \frac{1}{1+L(0)}$

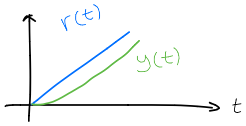
Om $L(0) = \infty \Rightarrow e(\infty) = 0$

dvs: $L(s) = \frac{K}{s^m} = \frac{(1+b_1s+b_2s^2+\dots)}{(1+a_1s+a_2s^2+\dots)}$ (m: typsiffra) Om $m \geq 1 \Rightarrow$ integralverkan

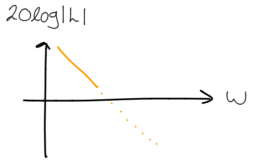
$m = 1$

$r(t) = t$

$e(\infty) = \frac{1}{K}$



Bode



② Ta bort processtörningar

I det oreglerade fallet fås: $Y(s) = G_v(s)V(s)$

— ıı — reglerade — ıı — : $Y(s) = G_v(s)V(s)S(s)$

Genom att sätta $S(s)=0$ kan vi ta bort inverkan av processtörningar.

③ Reducera inverkan av parametervariationer

$T = \frac{L}{1+L} = \frac{FG}{1+FG}$

Anta att $G = G + dG$. $\quad \frac{dT}{dG} = \frac{F(1+FG) - FG(F)}{(1+FG)^2} = \frac{F}{(1+FG)^2} = \frac{FG}{G(1+FG)^2} = \overbrace{\frac{FG}{G(1+FG)}}^{T} \cdot \overbrace{\frac{1}{1+FG}}^{S} = \frac{T}{G}S \Rightarrow \frac{dT/T}{dG/G} = S$

Om S är liten => liten känslighet för variationer av parametrar.

① → ③ har lett till önskemålet att $S(s)$ ska vara litet. Detta åstadkoms av ett stort $L(s)$: $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$, $L(s)$ stor => hög förstärkning. Detta leder i sin tur till ett mindre stabilt system.

④ Begränsa inverkan av mätbrus/mätstörningar

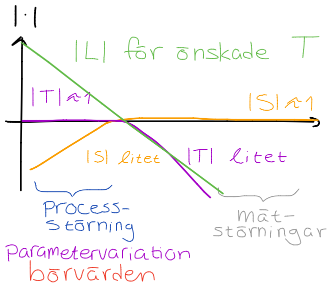
$Y(s) = -T(s)W(s) \Rightarrow$ Vi önskar $T(s) = 0$ men då "pajar vi $S(s)$".

"Konflikt med börvärdesföljning."

⑤ Styrsignal

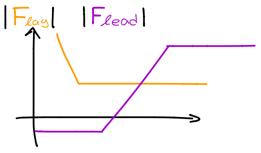
$U(s) = F(s)S(s)(R(s) - W(s)G_v(s)V(s)) = \frac{T}{G}(R - W - G_vV)$

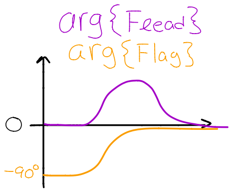
Idé, separera i frekvensplanet



$S = \frac{1}{1+L}$

$T = \frac{L}{1+L}$





Design i frekvensplanet

Modifiering av kretsöverföringen i vissa frekvensintervall kan åstadkommas med ex:

- En *fasretarderande* länk (lagfilter) ger hög förstärkning för låga frekvenser:

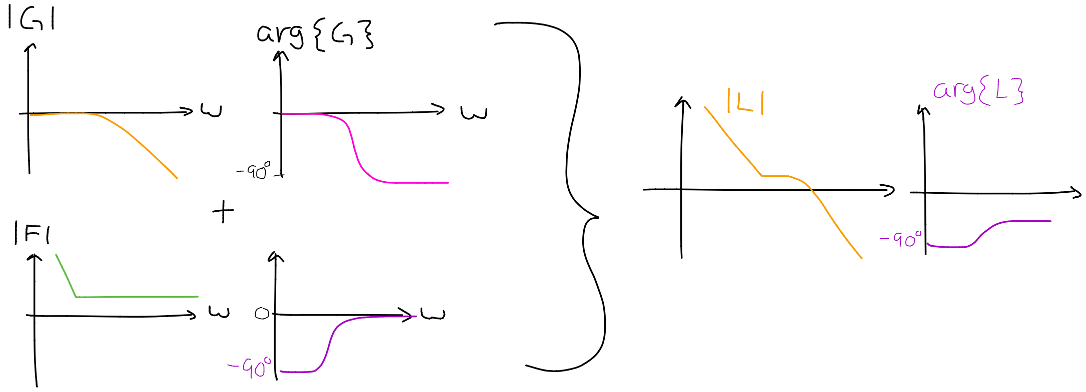
$$F(s) = a\frac{1+sT}{1+asT}, \quad a > 1$$

Uttrycket fasretarderande kommer av att en negativ fasförskjutning fås, framför allt inom frekvensintervallet $[1/aT, 1/T]$. En PI-regulator fås i extremfallet då $a = \infty$.

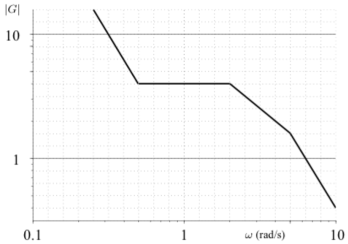
- En *fasavancerande* länk (leadfilter) ger ett positivt fastillskott inom frekvensintervallet $[1/T, b/T]$:

$$F(s) = \frac{1+sT}{1+sT/b}, \quad b > 1$$

En PD-regulator fås i extremfallet $b = \infty$.


|G|
ω
arg{G}
ω
-90°
+
|F|
ω
0
ω
-90°
|L|
arg{L}
-90°

Övningstal 5.3 (ptf6)



För en stabil överföringsfunktion $G(s)$ utan dödtid och ~~icke~~-minfas nollställen gäller ovanstående asymptotiska belopp-skurva. Bestäm $G(s)$.

Faktorisera $G(s) = \frac{K}{s} \frac{C_1(s) \cdot C_2(s) \cdot \ldots \cdot C_k(s)}{D_1(s) D_2(s) \cdot \ldots \cdot D_\ell(s)}$, $C_i(s)$ och $D_i(s)$ ges av: $1 + \frac{s}{w_i}$: 1a ordn länk

$1 + \frac{2\xi s}{w_i} + \left(\frac{s}{w_i}\right)^2$: komplex konj rotpar

$e^{-\frac{s}{w_i}}$: dödtid

w_i : Brytpunkt

$\bar{G}(s) = \frac{C_1(s) \cdot C_2(s) \cdot \ldots \cdot C_k(s)}{D_1(s) D_2(s) \cdot \ldots \cdot D_\ell(s)}$, $\bar{G}(0) = 1$ (5.15, s 179) $G(s) = \frac{K}{s^m} \bar{G}(s)$

$G_{LF} = \frac{K}{s^m} = \frac{K}{s^2}$

$|G_{LF}| = \left|\frac{K}{s^2}\right| \Rightarrow K = |G_{LF}| \cdot |s^2| = 4 \cdot w^2 = 4 \cdot (0.5)^2 = 1 \Rightarrow G_{LF}(s) = \frac{1}{s^2}$

3 brytpunkter: $w_1 = 0.5 \ \frac{rad}{s}$ riktningsändring $[+2] \Rightarrow$ KKRP: $1 + \frac{2\xi s}{0.5} + \left(\frac{s}{0.5}\right)^2$

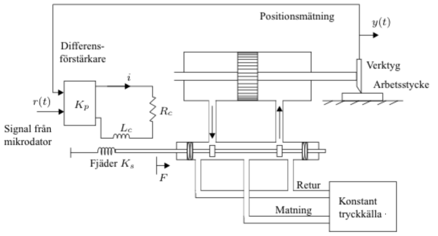
$w_2 = 2 \ \frac{rad}{s}$ —— 〃 —— $[-1] \Rightarrow$ enkel pol: $\left(1 + \frac{s}{2}\right)^{-1}$

$w_3 = 5 \ \frac{rad}{s}$ —— 〃 —— $[-1] \Rightarrow$ — 〃 —: $\left(1 + \frac{s}{5}\right)^{-1}$

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1 + \frac{2\xi s}{0.5} + \left(\frac{s}{0.5}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(1 + \frac{s}{5}\right)}$$

Övningstal 5.16 (pst14)

En numeriskt styrd verktygsmaskin får kommandosignal (referenssignal) från en mikrodator. Systemet enligt figur studeras i en dimension $y(t)$.



För differentialförstärkaren (P-regulator) gäller att utsignalen

$$U(s) = K_p[R(s) - Y(s)]$$

där $K_p = 0.2$, och solenoidkretsen har överföringsfunktionen

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R_c + sL_c}$$

där $R_c = 0.1\ \Omega$ och $L_c = 0.2$ H. Kraften F på den nedre axeln (magnetspole) antas vara proportionell mot strömmen, d.v.s. $F(t) = K_2 i(t)$ där $K_2 = 3.0$. Antag också att överföringen från kraften $F(t)$ till utsignalpositionen $y(t)$ är

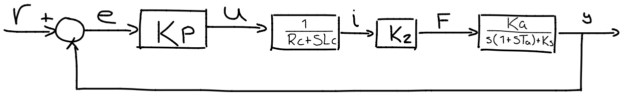
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_a}{s(1 + sT_a) + K_s}$$

där $T_a = 0.5$ s, $K_a = 1.0$ och $K_s = 2.0$ (fjäderkonstant)
Rita Bodediagram för den öppna kretsöverföringen och bestäm fasmarginalen φ_m, samt uppskatta stigtiden t_r med hjälp av överkorsningsfrekvensen ω_c.

a, b, c

a)

1. Rita blockschema för att lättare hitta L(s).

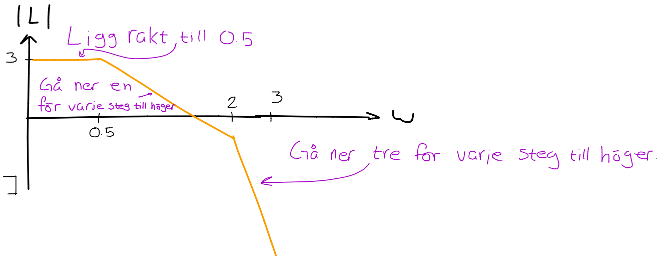


$$L(S) = Kp \cdot \frac{1}{Rc+SLc} \cdot K_2 \cdot \frac{Ka}{S(1+STa)+Ks} = \frac{KpKaK_2}{(Rc+SLc)(1+S^2Ta+S+Ks)} = \frac{0.6}{(0.1+S0.2)(0.5S^2+S+2)}$$

Skriv om på de tre kända formerna: $\Rightarrow \frac{0.6}{0.1(1+2S)2((\frac{S}{2})^2+\frac{S}{2}+1)} = \frac{3}{(1+2S)((\frac{S}{2})^2+\frac{S}{2}+1)}$

2. Rita bodediagram
- $G_{LF}(S) = 3$ (ingen lutning)
- Brytfrekuenser: $W_1 = 0.5$, $W_2 = 2$

W_1: $(1+\frac{S}{0.5})^{-1}$ $\Rightarrow$ riktningsändring [-1]
W_2: $((\frac{S}{2})^2+\frac{2}{S}+1)^{-1} \Rightarrow$ [-2]



Ligg rakt till 0.5

Gå ner en för varje steg till höger

Gå ner tre för varje steg till höger.

3: Inför korrigeringar vid 0.5Wi, Wi, 2Wi.

Wi	0.5	1	2
W1	-1dB	-3dB	-1dB
W2	+1dB	0dB	+1dB

W_2: $S^2+2\zeta W_n S+W_n^2 = 0 \Rightarrow S^2+2S+4=0 \Rightarrow W_n = \sqrt{4} = 2$
$\zeta = \frac{1}{W_n} = 0.5$

W	0.25	0.5	1	2	4
W1	-1dB	-3dB	-1dB		
W2			+1dB	0dB	+1dB
	-1dB	-3dB	0dB	0dB	+1dB

Rita nu om det assymptotiska bodediagrammet med korrigeringar.
Det är omöjligt utan linial och log-papper.

Rita faskurvan

$$\angle L(j\omega) = \angle 3 - \angle 1+\frac{j\omega}{05} - \angle \overbrace{\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2+\frac{j\omega}{2}+1}^{1-\frac{\omega^2}{4}+j\frac{\omega}{2}} = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{2}}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right) = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{2}}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right), & \omega \leqslant 2 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \left(\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{2}}{1+\frac{\omega^2}{4}}\right) + \pi\right), & \omega > 2 \end{cases}$$

ω	0.1	0.2	0.5	1	1.5	2	2.5	5	10
$\angle L(j\omega)$	-14°	-28°	-60°	-97°	-131°	-166°	-193°	-239°	-256°

b) Bestäm fasmarginalen φ_m.

$\varphi_m \equiv$ avståndet mellan fasen och 180° sträcket vid överkorsningsfrekvensen ($|L|=0$)

$\varphi_m = 40°$

$\varphi_m = 180 + \arg\{L(j\omega_c)\} = 180 + (-140) = 40.$

c) Bestäm stigtiden t_r för det återkopplade systemet.

$t_r \cdot \omega_c \approx 1$ (ganska fel...) Kolla s.200!

$t_r \approx \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{1.6} = 0.625s.$ (eg är t_r 0.775s)

Design av PID-regulatorer

P-regulator: $F(s)=K_p$ (höj eller sänk amplitud, påverkar inte argument/fas)

PI-regulator: $F(s)=K_p+\frac{K_i}{s}$ (Ändra amp med Kp/Ki, sänk fasen med $\frac{K_i}{s}$, arg = -90°)

$K_p(1+\frac{1}{T_i \cdot s}) = K_p + \frac{K_p}{T_i \cdot s}$ K_i

$F_{lag} = K_p\, a \frac{1+sT}{1+asT}$, $a>1$ om $a \to \infty \Rightarrow F_{lag} = K_p + \frac{K_i}{s}$

PD-regulator: $F(s) = K_p + K_d \cdot s$ (Vrider fasen med arg = 90°. Det är jobbigt med derivater så vi lägger till ett filter.)

$F(s) = K_p + \frac{K_d \cdot s}{1+T_f \cdot s}$

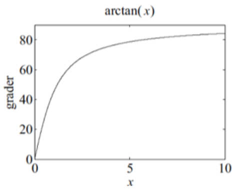
$F_{lead} = K_p \frac{1+sT_d}{1+sT_d\frac{1}{b}}$, $b>1$ $b\to\infty \Rightarrow$ ideal PD-reg.

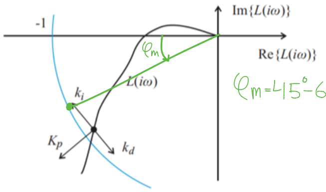
PID-regulator: $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = K_p(1+\frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s) = K_p \cdot \frac{a(1+sT_i)}{1+asT_i} \cdot \frac{1+T_d s}{1+T_d s\frac{1}{b}}$

Hur påverkar tuningen?

$$\begin{aligned} F(s) &= K_p(1+\frac{1}{sT_i}+sT_D) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\ &= K_p(1+\frac{k_i}{s}+k_d s) = K_p\left(\frac{s+k_i+k_d s^2}{s}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg L(j\omega) &= \arg G(j\omega) - \arg j\omega + \arg(j\omega + k_i - k_d\omega^2) \\ &= \arg G(j\omega) - 90^o + \arctan\left(\frac{\omega}{k_i - k_d\omega^2}\right) \end{aligned}$$





$\varphi_m = 45°-60°$ är eftersträvansvärt

Flytta punkt i Nyquist-/Bodediagram

En vanlig teknik att dimensionera PID-regulatorer är att specificera en punkt på kretsöverföringens frekvenskurva. På detta sätt kan 2 parametrar bestämmas i regulatorn:

1. Specificera en punkt för kretsöverföringen, $L(i\omega_0)$
2. Bestäm parametrarna i regulatorn genom villkoren

$$|F(i\omega_0)| = |L(i\omega_0)|/|G(i\omega_0)|$$
$$\arg F(i\omega_0) = \arg L(i\omega_0) - \arg G(i\omega_0)$$

Ett exempel på detta är att specificera fasmarginal φ_m och skärfrekvens ω_c. OBS! Det finns flera olika varianter av detta, men "grundreceptet" är detsamma enl ovan!

PI-design

PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

- Specifikation av ω_c och φ_m (Ruta 8.1 i boken):

$$|L(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)| K_p \frac{\sqrt{1+\omega_c^2 T_i^2}}{\omega_c T_i} = 1$$
$$\arg L(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) - 90^o + \arctan(\omega_c T_i) = -180^o + \varphi_m$$

- Specifikation av ω_π och A_m ger i princip samma som ovan:

$$|L(j\omega_\pi)| = |G(i\omega_\pi)| K_p \frac{\sqrt{1+\omega_\pi^2 T_i^2}}{\omega_\pi T_i} = 1/A_m$$
$$\arg L(j\omega_\pi) = \arg G(j\omega_\pi) - 90^o + \arctan(\omega_\pi T_i) = -180^o$$

PD-design

En PD-regulator ges av

$$F(s) = K_p(1 + \frac{sT_d}{1+sT_f}) = K_p \frac{1 + s(T_d + T_f)}{1 + sT_f} = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + \tau_d s / b}, \quad b > 1$$

Anta att ω_c och φ_m är specificerade (Ruta 8.3 i boken):

1. Bestäm behovet av faslyft vid skärfrekvensen:

$$\varphi_{max} = \varphi_m - (\arg G(i\omega_c) + 180^o)$$
$$b = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}}$$

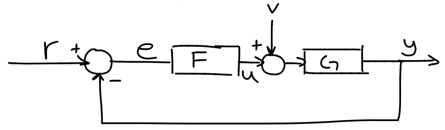
2. Placera maximalt faslyft vid $\omega = \omega_c$:

$$\sqrt{b}/\tau_d = \omega_c$$

3. Bestäm K_p så att ω_c blir det önskade:

$$|L(j\omega_c)| = K_p\sqrt{b}|G(j\omega_c)| = 1$$

Designexempel



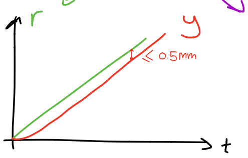
$$G(s) = \frac{3 \cdot 10^4}{s(s^2 + 150s + 10^4)}$$

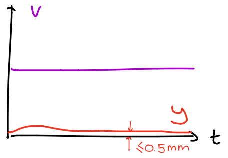
Krav

Rampfel ≤ 0.5mm vid insignalsramp 30 mm/s.

Positionsfel ≤ 0.5 mm vid stegstörning på 15 enheter

Fasmarginal $\varphi_m \geq 45^\circ$





Vi har integralverkan i G så vi provar med att köra en hederlig P-reg. De två graferna visar att vi vill ha ett litet kvarstående fel och detta borde kunna ordnas med systemets i-verkan.

① P-regulator

$$\text{ramp} = \frac{r_0}{s^2} = \frac{30}{s^2}$$

1) $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot S(s)R(s) = \lim\limits_{s\to 0} s \frac{1}{1 + \frac{3K_p}{s(\dots)}} \cdot \frac{30}{s^2} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\cancel{s} \cdot s(1+0.0015s+\dots)}{s(1+\dots)+3K_p} \cdot \frac{30}{\cancel{s^2}} = \frac{30}{3K_p} = \frac{10}{K_p} \leq 0.5$

$\Rightarrow K_p \geq 20$

$$\frac{15}{s}$$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s) = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+K_pG(s)} \cdot V(s) = \lim\limits_{s\to 0} s \frac{\left(\frac{3}{s(1+\dots)}\right)}{1 + \frac{3K_p}{s(1+\dots)}} \cdot \frac{15}{s} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{3 \cdot 15}{s(1+\dots)+3K_p} = \frac{15}{K_p} \leq 0.5 \Rightarrow K_p \geq 30$

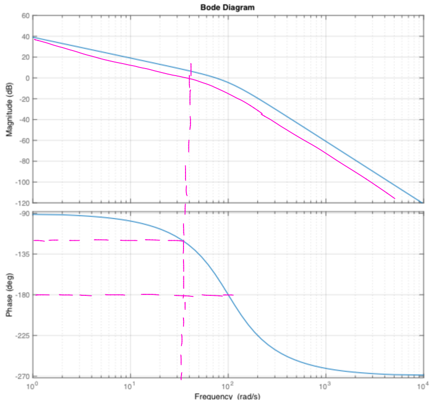
3) $\varphi_m \geq 45^\circ$

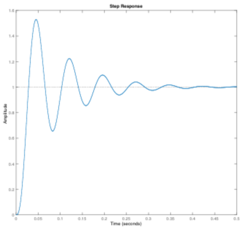
$\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L(i\omega)\} =$

$= 0$ ty P-reg

$180^\circ + \arg\{F(i\omega_c)\} + \arg\{G(i\omega_c)\} =$

$180^\circ + \arg\{G(i\omega_c)\}$





Bode visar att fasmarginalen $\varphi_m = 25^\circ$

Uppfyller ej specen!

② Nytt försök, sänk K_p för att få en bra φ_m.

$\varphi_m = 55°$ (lägg till marginal för I-verkan [10°])

Detta ger $\omega_c = 40 \frac{rad}{s} \Rightarrow K_p = \frac{30}{2.1} \approx 14$ men då klarar vi inte specen ändå.

↗ Skillnad i dB mellan kurvorna

③ Höj förstärkningen för små ω.

$$F_{lag}(s) = \frac{a(1+sT)}{1+asT}$$

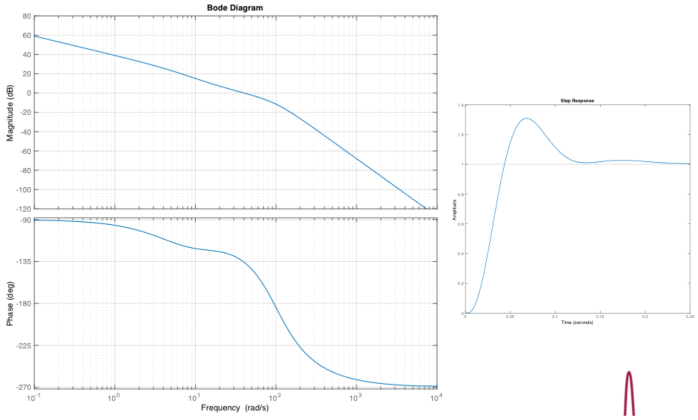
Lågfrekvensförstärkningen för $F_{lag}(0) = a$ välj a så att $K_p \cdot a = 30$ (a=2.1)

$$\arg\{F_{lag}(j\omega_c)\} = \tan^{-1}(\omega_c T) - \tan^{-1}(a\omega_c T) = -10°$$ ← vår marginal

$T = 0.075$

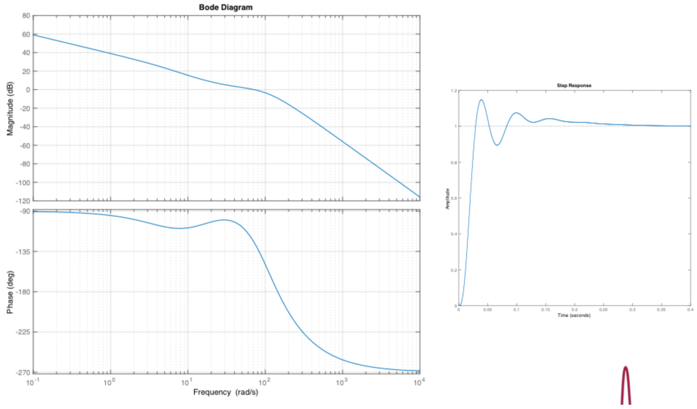
$$F(s) = 30\left(\frac{1+0.075s}{1+2.1 \cdot 0.075s}\right)$$

Lag-filter + Process

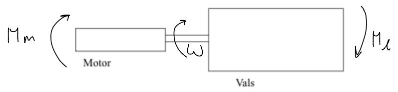


Lag + Lead + Process

Vi kan snabba upp systemet ännu mer! →



Övningstal 6.5 (ppi2)
I denna uppgift skall vi studera motordriften av en vals i ett valsverk (se figur).



Systemet kan förenklat beskrivas av ekvationen

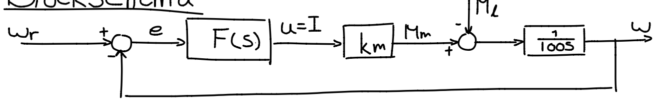
$$J\frac{d\omega}{dt} = M_m - M_l$$

där ω är vinkelhastigheten, J är summan av motorns och valsens tröghetsmoment, samt M_m och M_l är motorns drivande moment respektive lastmoment. Motorns drivande moment ges av $M_m = k_m \cdot I$, där k_m är en motorkonstant och I är motorströmmen. Följande parametervärden gäller: $k_m = 5$ Nm/A, $J = 100\,\mathrm{kg\,m}^2$.
Man vill att valsen skall följa en vinkelhastighetsreferens ω_r, och för att uppnå detta återkopplas vinkelhastigheten med en regulator, som styr motorströmmen.

a) Dimensionera en lämplig regulator, som uppfyller följande specifikationer:

  i) Vinkelhastighetsreferensen skall följas utan stationärt fel för konstant lastmoment.
  ii) Ett lastmoment, som växer linjärt med 10 Nm/s skall stationärt ge upphov till ett vinkelhastighetsfel på högst 0.5 rad/s.
  iii) Det slutna systemet skall ha en relativ dämpning $\zeta = 0.7$.

Blockschema



i) Vi vill inte ha något stationärt fel. Vi har visserligen integralverkan i $\frac{1}{100s}$ men Nina vill använda en PI-reg ändå.

Test för P-reg $\longrightarrow$ $\frac{E(s)}{M_l(s)} = \frac{\frac{1}{100s}}{1+K_pK_m\frac{1}{100s}} = \frac{1}{100s+K_pK_m}$, $M_l = \frac{h}{s} \Rightarrow \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{100s+K_pK_m}\right)\frac{h}{s} = \frac{h}{K_pK_m}$

$F(s) = \frac{K_i}{s}(1+T_i \cdot s)$ är en PI. Nina säger att den funkar! $K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K_p}{T_i s}(T_i s+1)$

ii) $M_l(t) = 10t \Rightarrow M_l(s) = \frac{10}{s^2}$

$$\frac{E(s)}{M_l(s)} = \frac{\frac{1}{100s}}{1+\frac{K_i}{s}(1+T_is)K_m\left(\frac{1}{100s}\right)} = \frac{1}{100s+\frac{K_i}{s}(1+T_is)5} = \frac{s}{100s^2+K_i(1+T_is)5}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) \leq 0.5 \Rightarrow \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{\cancel{s}}{100s^2+K_i(1+T_is)5}\cdot\frac{10}{\cancel{s^2}} = \frac{10}{5K_i} \leq 0.5 \Rightarrow K_i \geq \frac{10}{5\cdot 0.5} = 4$$

iii) $$G_{\omega_r\omega} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{K_i}{s}(1+T_is)\frac{5}{100s}}{1+\frac{K_i}{s}(1+T_is)\frac{5}{100s}} = \frac{5K_i(1+T_is)}{100s^2+5K_i(1+T_is)} = \frac{\frac{5}{100}K_i(1+T_is)}{s^2+\frac{5}{100}K_i(1+T_is)} =$$

$$\frac{\frac{5}{100}K_i(1+T_is)}{s^2+\frac{5K_iT_i}{100}s+\frac{5K_i}{100}} \quad , \quad \left.\begin{matrix}\omega_n = \sqrt{\frac{5K_i}{100}} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{5K_iT_i}{100}\end{matrix}\right\} \quad T_i = \frac{2\zeta\omega_n}{0.05K_i} = \frac{2\cdot 0.7\sqrt{0.05K_i}}{0.05K_i} = \frac{2\cdot 0.7}{\sqrt{0.05K_i}}$$

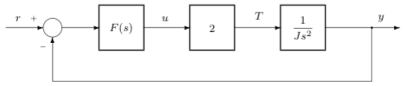
tidigare fick vi $K_i \geq 4 \Rightarrow$

$$T_i \leq \frac{2\cdot 0.7}{\sqrt{0.05\cdot 4}} \approx 3.13$$

$$F(s) = \frac{4}{s}(1+3.13s)$$

Övningstal 6.8 (ppi9)

När astronauterna Armstrong och Aldrin landsatte mänsklighetens första farkost på månen, hade de god hjälp av ett reglersystem för reglering av attitydvinkeln, se figur. Här är r önskad attitydvinkel, y verklig attitydvinkel, u styrsignal till jetstrålarna och T moment på farkosten. Tröghetsmomentet antas vara $J = 0.25$.



a) Vilken av följande regulatorer fungerar för denna typ av process: P- PI- eller PD-regulatorn? Motivering krävs.

b) Dimensionera en regulator, som ger en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 5$ rad/s samt en fasmarginal $\varphi_m = 60°$. Placera regulatorns maximala faslyft vid önskad överkorsningsfrekvens.

a) Vi vill lyfta fasen ty systemet $\frac{2}{Js^2}$ ger en fas på $-180°$ => $\varphi_m = 0$. D-verkan fixar detta.

b) $\omega_c = 5\ \frac{rad}{s}$, $\varphi_m = 60°$, Placera reg. max. faslyft vid ω_c.

$\sqrt{b} \cdot K_p \Rightarrow K_p = \frac{1}{\sqrt{b}\,|G(j\omega_c)|}$

$$F(s) = K_p\left(\frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s \frac{1}{b}}\right),\quad b = \frac{1+\sin(\varphi_{max})}{1-\sin(\varphi_{max})},\quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c},\quad |L(j\omega_c)| = 1 = |F(j\omega_c)||G(j\omega_c)|$$

$\varphi_{max} \equiv$ fasen för F vid ω_c. $\varphi_{max} = \angle F(j\omega_c)$ $\quad \angle L(j\omega_c) = \varphi_m - 180° = \angle F(j\omega_c) + \angle G(j\omega_c) \Rightarrow$

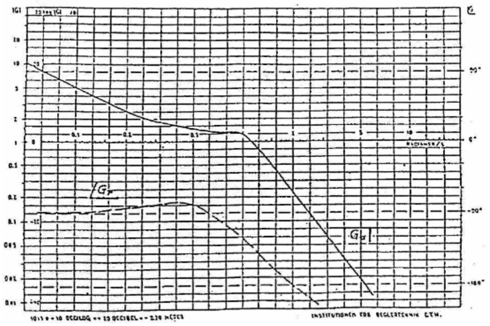
$$\varphi_{max} = \varphi_m - 180° - \angle G(j\omega_c) = 60° - 180° - (-180°) = 60°$$

$$b = \frac{1+\sin(60°)}{1-\sin(60°)} \approx 13.93 \Rightarrow \tau_d \approx \frac{\sqrt{13.93}}{5} \approx 0.75 \Rightarrow K_p \approx \frac{1}{\sqrt{13.93}\left|\frac{2}{0.25(j\omega_c)^2}\right|} \approx 0.84$$

$$F_{PD}(s) = 0.84\ \frac{1+s \cdot 0.75}{1+s \cdot 0.054}$$

Övningstal 6.23 (padf7)

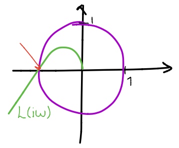
Bodediagrammet för en viss process, $G_p(s)$, är givet nedan:



1) Sätt $T_i = \infty$, $T_d = 0$, kolla bara K_p
2) Höj K_p tills stabilitet nås.
3) Låt $K_0 = K_p$, notera självsvängningens periodtid T_0.
$K_0 G(j\omega_\pi) = -1$ där $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$
4) Kolla tabell.
5) $T_f = \frac{T_d}{10}$

Processen skall PID-regleras. Bestäm, med användning av Ziegler/Nichols svängningsmetod, parametrarna K_r, T_i och T_d, hos regulatorn $G_r(s)$.

$$F_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1+T_f s}\right)$$



Självsvängning inträffar då $\overbrace{|L(j\omega_\pi)| = 1}^{①}$, $\overbrace{\angle L(j\omega_\pi) = 180°}^{②}$

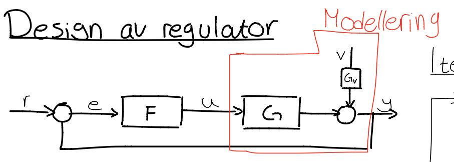
$|F(j\omega_\pi)||G(j\omega_\pi)| = 1 \iff K_0|G(j\omega_\pi)| = 1$ (använd nu Bode)

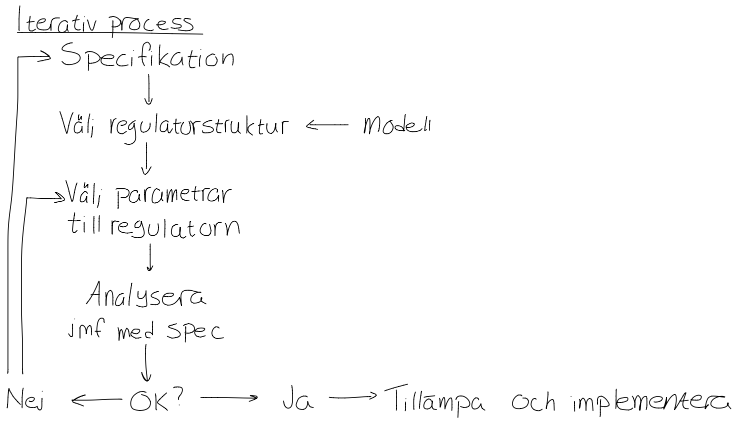
Kolla vad beloppskurvan är där fasen är -180°. => $K_0|G(j2)| = 1 \iff K_0 = \frac{1}{0.21} \approx 4.76$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$\left.\begin{aligned} K_p &= \{\text{tabell}\} = 0.6 K_0 \approx 2.9 \\ T_i &= 0.5 T_0 = 1.6 \\ T_d &= 0.125 T_0 = 0.4 \end{aligned}\right\} F_{PDI} = 2.9\left(1 + \frac{1}{1.65} + \frac{0.4}{1+0.045}\right)$$

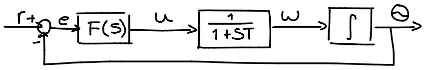
Design av regulator





Ex DC-motorservo (Inl.m 1)

$$G(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$$



P-regulator: $G_{r\theta}(s) = \dfrac{\frac{K_p}{s(1+sT)}}{1+\frac{K_p}{s(1+sT)}} = \dfrac{K_p}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{1}{T}K_p}$

$KE: s^2+\frac{1}{T}s+\frac{1}{T}K_p=0$

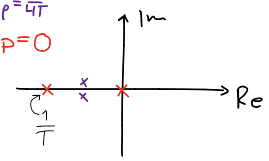
$$R\text{-}H:\quad \begin{array}{l|cc} s^2: & 1 & \frac{K_p}{T} \\ s^1: & \frac{1}{T} & 0 \\ s^0: & \frac{K_p}{T} & 0 \end{array}$$

Stabilt om $K_p>0$.

Slutna systemets poler: $s = \frac{1 \pm \sqrt{1-4K_pT}}{2}$

Här börjar kkr → $K_p = \frac{1}{4T}$

$K_p = 0$



PD-regulator: $F(s) = K_p + K_d \cdot s \Rightarrow G_{r\theta}(s) = \dfrac{\frac{K_p+K_d \cdot s}{s(1+sT)}}{1+\frac{K_p+K_ds}{s(1+sT)}} = \dfrac{K_p+K_ds}{s^2+\frac{1+K_d}{T} \cdot s+\frac{K_p}{T}}$

$KE: s^2+\frac{1+K_d}{T}s+\frac{K_p}{T}=0$

Polplacering

Bestäm var slutna systemets poler ska placeras.

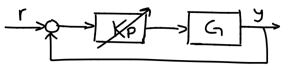
Ponera att vi söker: $s_1=-a,\ s_2=-b \Rightarrow s^2+(a+b)s+ab=0$

Patternmatcha mot vår KE!

Patternmatching ⇒ $\frac{1+K_d}{T} = a+b \Rightarrow K_d = (a+b)T-1$

$\frac{K_p}{T} = ab \Rightarrow K_p = abT$

Ziegler-Nichols svängningsmetod



Skär i -1.

1. Sätt $F(s) = K_p$
2. Öka K_p tills systemet börjar självsvänga ⇒ ω_π
3. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$
4. Kolla i tabell!

Kommer ej på tentan!

Lambda-metoden

Används för att ställa in PI-regulatorer för att åstadkomma en given överföringsfunktion från r till y:

$$G_{ry} \approx \frac{e^{-s\tau_d}}{1+\lambda s}$$

baserat på en approximativ processmodell.

Processmodell	K	T_i
$G_p = \dfrac{Ke^{-s\tau_d}}{1+s\tau}$	$\dfrac{\tau}{K(\lambda+\tau_d)}$	τ
$G_p = \dfrac{Ke^{-s\tau_d}}{s}$	$\dfrac{T_i}{K(\lambda+\tau_d)^2}$	$2\lambda+\tau_d$

λ väljs vanligen i intervallet $0.5\tau - 3\tau$.

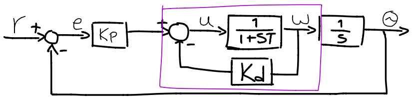
Metoden är populär (och väldigt användbar!) i processindustrin genom att man bara behöver trimma regulatorn med en parameter som dessutom är lätt att relatera till.

Alternativa regulatorstrukturer

$$\frac{\frac{1}{1+ST}}{1+\frac{Kd}{1+ST}} = \frac{1}{ST+1+Kd}$$

Inre återföring

Ex DC-motorservo



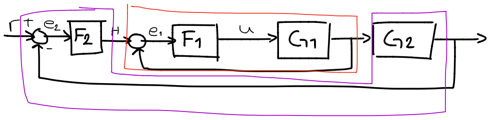
$$G_{r\theta}(s) = \frac{\frac{Kp}{s(ST+1+Kd)}}{1+\frac{Kp}{s(ST+1+Kd)}} = \frac{Kp}{s^2T+(1-Kd)s+Kp} = \frac{\frac{Kp}{T}}{s^2+\frac{1+Kd}{T}\cdot s+\frac{Kp}{T}}$$

dvs: samma effekt som fås av en PD-regulator men vi behöver inte derivera felsignalen.

Kp och Kd kan bestämma det slutna systemets dynamik.

Kaskadreglering

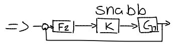
Generalisering av inre återföring.



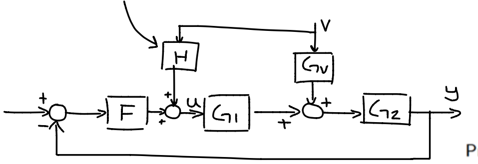
Notera: 2 mätningar men en styrsignal, u.

Tidsskalor: Inre loopen snabb.

Yttre loopen långsam.



Framkoppling



$$Y = G_2(G_v + HG_1)v = 0 \Rightarrow H = \frac{-G_v}{G_1} \Rightarrow Y = 0 \cdot V$$

Problem:

1. Ej för stora modellfel.
2. F_{FF} stabil $\Rightarrow$ nollställena till $G_1 \in$ VHP.
3. F_{FF} kausal $\Leftrightarrow$ dödtid hos $G_v \geq$ dödtid hos G_1.
4. F_{FF} proper $\Leftrightarrow$ grad(nämnare) $\geq$ grad(täljare).

(1) Gör en försiktig kompensering. (2-4) Sträva efter att minimera påverkan i det frekvensområde där de huvudsakliga störningarna är. Är störningarna lågfrekventa ger ofta $F_{FF} = -G_v(0)/G_1(0)$ ändå en markant förbättring.

PID-summering

P-regulator

$+$ Enkel
$-$ Dålig statisk nogrannhet, d v s om r konstant så blir i regel $y \neq r$

PI-regulator

$+$ God statisk nogrannhet, d v s om r konstant blir i regel $y = r$
$+$ Långsamma processtörningar regleras bort väl
$-$ Försämrade stabilitetsmarginaler (I-verkan medför ökad negativ fasvridning)

D-verkan

$+$ Förbättrad stabilitet
$+$ Snabbare reglering möjlig
$-$ Ökad känslighet för mätstörningar

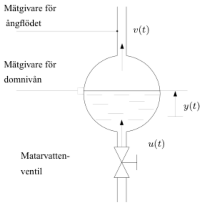
OBS1: en ren D-verkan $K_d \frac{de}{dt}$ kan i praktiken inte realiseras eftersom det kräver oändliga styrsignaler.

OBS2: Vid börvärdesändring kan D-verkan orsaka alltför häftiga styrsignalförändringar. För att undvika detta kan man låta D-delen endast verka på y:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau - K_d \frac{d}{dt} y(t)$$

Övningstal 7.5 (pad5)

I en ångpanna av s k domtyp används en behållare (domen) för att skilja vatten och ånga. Det är väsentligt att hålla konstant vattennivå i domen vid belastningsändringar.



Domen kan beskrivas med modellen

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s}U(s) - \frac{10^{-4}(1-100s)}{s(1+10s)}V(s)$$

där y är domnivån i meter, $\overset{u}{\cancel{x}}$ matarvattenflödet i kg/sek och f är ångflödet i kg/sek.

a) I systemet införes en P-regulator för konstanthållning av nivån y via styrning av matarvattenflödet. Rita blockschema över det slutna systemet, inklusive störningens (ångflödets) inverkan!

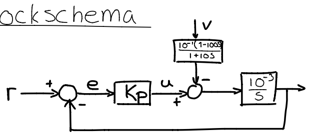
b) Dimensionera regulatorns förstärkningsfaktor K (kg/sek)/m så att ett begynnelsefel i nivån minskar till 25% av ursprungsvärdet efter 1 minut! Vad blir då kvarstående nivåfelet svarande mot en stegstörning i ångflöde på 2 kg/sek?

c) Ange en framkoppling i reglersystemet, baserad på mätning av ångflödet, så att nivån blir oberoende av ändringar i ångflödet. Rita blockschema!

d) Hur påverkas slutna systemets stabilitet av framkopplingen?

a) $Y(S) = \frac{10^{-3}}{S}U(S) - \frac{10^{-4}(1-100S)}{S(1+10S)}V(S) = \frac{10^{-3}}{S}\left[U(S) - \frac{10^{-1}(1-100S)}{1+10^{S}}V(S)\right]$

Blockschema



b) Anta att referenshöjden är r_0 [m] $\Rightarrow R(S) = \frac{r_0}{S}$

Hitta ett uttryck för $e(t)$ och lös sedan Kp givet att $e(60) = 0.25e(0)$.

$E(S) = G_{re}(S)R(S) = \left\{G_{re}(S) = \frac{1}{1+\frac{Kp\cdot10^{-3}}{S}}\right\} = \frac{1}{1+\frac{Kp10^{-3}}{S}}\cdot\frac{r_0}{S} = \frac{r_0}{S+Kp\cdot10^{-3}}$

$e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(S)\} = r_0e^{-(Kp\cdot10^{-3})t}$

$e(0) = r_0$, $e(60) = r_0e^{-(Kp\cdot10^{-3})60} = 0.25r_0 \Leftrightarrow e^{-(Kp\cdot10^{-3})60} = 0.25$

$-Kp10^{-3}\cdot60 = \ln(0.25) \Leftrightarrow Kp = -\frac{\ln(0.25)}{10^{-3}\cdot60} \approx 23.1$

Kvarstående felet vid en stegstörning på 2 $\frac{kg}{s}$.

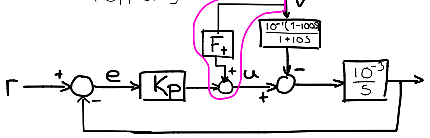
$V(t) = 2$, $V(S) = \frac{2}{S}$

$E(S) = G_{ve}(S)V(S) = \left\{\frac{\frac{10^{-4}(1-100S)}{S(1+10S)}}{1+\frac{Kp10^{-3}}{S}} = \frac{10^{-4}(1-100S)}{S(1+10S)+(1+10S)Kp10^{-3}} = \frac{10^{-4}(1-100S)}{(1+10S)(S+Kp10^{-3})}\right\} = \frac{10^{-4}(1-100S)}{(1+10S)(S+Kp10^{-3})}\cdot\frac{2}{S}$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{S\to0} SE(S) = \lim_{S\to0} S\left(\frac{10^{-4}(1-100S)}{(1+10S)(S+Kp10^{-3})}\cdot\frac{2}{S}\right) = \lim_{S\to0}\frac{2\cdot10^{-4}(1-100S)}{(1+10S)(S+Kp10^{-3})} = \frac{2\cdot10^{-4}}{Kp\cdot10^{-3}}\{Kp\approx23.1\}\approx 8.66\cdot10^{-3}$ M

c) Anv framkoppling.

Framkoppling från störsignal. I de fall man kan mäta störningen kan man helt eliminera den genom framkoppling.



$U(S) = KpE(S) + F_f(S)\cdot V(S) \Rightarrow Y(S) = \frac{10^{-3}}{S}[U(S) - G_v(S)V(S)]$

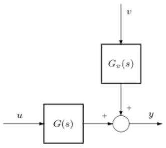
$Y(S) = \frac{10^{-3}}{S}[KpE(S) + F_f(S)V(S) - G_v(S)V(S)]$

för att eliminera störningen: $F_f(S)V(S) - G_v(S)V(S) = 0$

$V(S)(F_f(S) - G_v(S)) = 0$

d) $1 + L(S) = 0 \Rightarrow$ Poler. Framkopplingsfiltret ingår inte i $L(S)$ så det påverkar inte stabiliten.

Övningstal 7.6 (pad8)



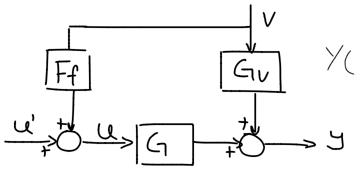
En framkopplingslänk skall dimensioneras för ovanstående process där störningen v antas vara mätbar. Processens överföringsfunktioner antas ha formen

$$G(s) = \frac{s+b}{s+a}e^{-sT_d}$$
$$G_v(s) = \frac{s+b_v}{s+a_v}e^{-sT_{dv}}$$

a) Bestäm framkopplingslänken $F_f(s)$.

b) För vilka värden på parametrarna i processmodellerna går det att åstadkomma en praktiskt realiserbar länk $F_f(s)$ som ger ett stabilt reglersystem? Ange alternativa förslag på kompensering för övriga parameterkombinationer.

a)



$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\left(U'(s) + F_f(s)V(s)\right) + G_v(s)V(s) = G(s)U'(s) + \left(F_f(s)G(s) + G_v(s)\right)V(s)$$

För att eliminera störningen: $G(s)F_f(s) + G_v(s) = 0 \Rightarrow F_f(s) = -\frac{G_v(s)}{G(s)} = -\frac{\frac{s+b_v}{s+a_v}e^{-T_{dv}s}}{\frac{s+b}{s+a}e^{-T_d s}} = -\frac{(s+b_v)(s+a)}{(s+b)(s+a_v)}e^{-(T_{dv}-T_d)s}$

b) $b>0$, $a_v>0 \Rightarrow$ Stabil (realiserbar) $F_f(s) \Rightarrow$ Nollställena till $G(s)$ ska ligga i VHP.
Polerna —"— $G_v(s)$ ——"——
Positiva dötider $\Rightarrow T_{dv} \geq T_d$

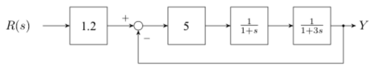
<u>Alternativa förslag</u>

Om kraven ej är uppfyllda: Kolla på den statiska delen av framkopplingen ($F_f(0)$).
Detta eftersom processstörningar oftast är lågfrekventa.

$$F_f(0) = -\frac{ab_v}{ba_v}$$

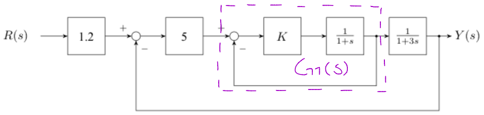
Övningstal 7.14 (pbl1)

Betrakta följande reglersystem:



a) Beräkna slutna systemets överföringsfunktion och uppskatta insvängningstiden t_s (5% från slutvärdet) vid stegformad referensändring.

b) I figuren nedan har kaskadreglering införts kring det snabbare delsystemet. Hur förändras det återkopplade systemet och insvängningstiden om vi antar att förstärkningen K väljs stor? (Låt $K \to \infty$!)



a) $G_{ry}(s) = \frac{1.2\cdot 5\cdot\frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1+3s}}{1+5\cdot\frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1+3s}} = \frac{6}{(1+s)(1+3s)+5} = \frac{6}{3s^2+4s+6} = \frac{2}{s^2+\frac{4}{3}s+2} \Rightarrow 2\zeta\omega_n = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \zeta\omega_n = \frac{2}{3}$

t_s: tiden då $0.95y_f \leq y(t) \leq 1.05y_f$, $t > t_s$
Formelsamlingen: $t_s = \frac{3}{a} = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{2/3} = 4.5\,s$

b) $G_1(s) = \frac{\frac{K}{1+s}}{1+\frac{K}{1+s}} = \frac{K}{1+s+K}$, $\quad G_{ry}(s) = \frac{1.2\cdot 5\cdot G_1(s)\cdot\frac{1}{1+3s}}{1+5\cdot G_1(s)\cdot\frac{1}{1+3s}} = \frac{\frac{6}{1+3s}\cdot\frac{K}{1+s+K}}{1+\frac{5}{1+3s}\frac{K}{1+s+K}} = \frac{6K}{(1+3s)(1+s+K)+5K}$

$G_{ry} = \frac{6}{(1+3s)(\frac{1+s}{K}+1)+5} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{6}{(1+3s)+6} = \frac{2}{s+2}$

Formelsamling: $3T$ (T= tidskonstanten, $\frac{1}{1+\frac{1}{2}s}$) $\Rightarrow t_s = 1.5\,s$ ← snabbare!

Tillståndsåterkoppling

Ex DC-servo med PD-regulator

Process $G(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$

Regulator: $F(s) = K_p(1+T_d s)$

Designmetod beror på specifikation. Ex: Flytta punkt i Nyquistdiagram.

1. Givet är ω_c, φ_m.
2. Bestäm T_d från: $\arg\{F\} + \arg\{G\} = \varphi_m - \pi$
   $\tan^{-1}(\omega_c T_d) - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega_c T) = \varphi_m - \pi \Rightarrow T_d$
3. Bestäm K_p från: $|F(j\omega_c)||G(j\omega_c)| = K_p|1 + j\omega_c \cdot T_d|\left|\frac{1}{\omega_c(1+j\omega_c T)}\right| = 1 \Rightarrow K_p$

Designidéen: Två ekvationer / Två regulatorpar => Unik lösning.

PID-summering

P-regulator
- \+ Enkel
- \- Dålig statisk nogrannhet, d v s om r konstant så blir i regel $y \neq r$

PI-regulator
- \+ God statisk nogrannhet, d v s om r konstant blir i regel $y = r$
- \+ Långsamma processtörningar regleras bort väl
- \- Försämrade stabilitetsmarginaler (I-verkan medför ökad negativ fasvridning)

D-verkan
- \+ Förbättrad stabilitet
- \+ Snabbare reglering möjlig
- \- Ökad känslighet för mätstörningar

OBS1: en ren D-verkan $K_d \frac{de}{dt}$ kan i praktiken inte realiseras eftersom det kräver oändliga styrsignaler.

OBS2: Vid börvärdesändring kan D-verkan orsaka alltför häftiga styrsignalförändringar. För att undvika detta kan man låta D-delen endast verka på y:

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))d\tau - K_d \frac{d}{dt} y(t)$$

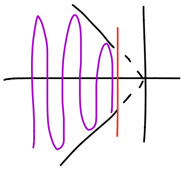
Var ska man placera polerna?

Det beror på de givna specifikationerna:

Insvängningstid	$(T_{5\%}) \approx \frac{6}{\omega_c(\tan(\varphi_m))}$
Stigtid	$(T_s) \approx \frac{1.4}{\omega_c}$
Resonanstopp	$(M_p) = \max|T(j\omega)| \approx \frac{1}{2 \cdot \sin(\varphi_m/2)}$
Slutna systemets bandbredd	$(\omega_b) \approx 1.5\,\omega_c$

Givet: $G(s) = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$\zeta \approx 0.7$



Alternativa regulatorstrukturer

Det finns många sätt att "bygga" ett reglersystem, förutom den enkla, återkopplade kretsen som vi studerat hittills. Här är några exempel:

- Inre återföring:
  - En intern mätsignal är tillgänglig och kan användas för en "inre" återkoppling
  - Ett typiskt exempel på detta är hastighetssignalen i en motordrift
- Kaskadreglering:
  - Används ofta då man har tillgång till en extra mätning, som ligger "närmare" styrsignalen än den slutliga utsignalen
  - Genom att sluta en inre reglerloop, som är snabbare än den yttre, kan man förbättra prestanda
  - Ett exempel är reglering av dubbeltanken i labben!
- Framkoppling:
  - Återkoppling bygger på att observerade (mätta) felaktigheter korrigeras
  - Om en störning mäts, så finns möjlighet att kompensera denna "i förväg"
  - Denna s.k. framkoppling används oftast tillsammans med återkoppling

Tillståndsmodell

$G(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$

$Y(s) = G(s)U(s)$

$s^2TY(s) + sY(s) = U(s) \iff T\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$

Alternativ beskrivning, tillståndsform!

$$x = \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{T}(\dot{y} + u) = \frac{1}{T}(-x_2 + u) \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix} u$$

Återkoppla från tillstånden

$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 + k_r \cdot r$

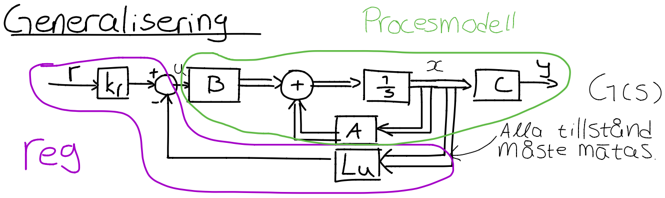
$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{1}{T}u = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{1}{T}(-l_1 x_1 - l_2 x_2 + k_r \cdot r) = -\frac{l_1}{T}x_1 - \left(\frac{l_2}{T} + \frac{1}{T}\right)x_2 + \frac{k_r}{T} \cdot r$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{l_1}{T} & -\left(\frac{l_2}{T} + \frac{1}{T}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_r}{T} \end{bmatrix} r$$

Sytemets poler ges fortf av $\det(sI - A) = 0$.

Generalisering



$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Notera

Tjocka pilar: Vektorer.

$$\text{Givet} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Anta att alla tillstånd är mätbara. Ansätt: $u = -L_u \cdot x + k_r \cdot r = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r \end{bmatrix} r$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-L_u x + K_r \cdot r) = (A - B \cdot L_u)x + B \cdot K_r \cdot r$$
$$y = Cx$$

$G_{ry}(s) = C(sI - (A - BL_u))^{-1} B \cdot K_r$

Designmetod

1. Bestäm var det slutna systemets poler ska vara.
2. Beräkna L_u gm $\det(sI - (A - BL_u)) = 0$

Ex DC-motorservo, sätt $T = 1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{l_1}{T} & -\left(\frac{l_2}{T} + \frac{1}{T}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_r}{T} \end{bmatrix} r \Rightarrow$$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$

$$G_{ry}(s) = C(sI - (A - BL_u))^{-1} BK_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 - 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ K_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_1 & s + l_2 + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s + 1 + l_2) + l_1} \begin{bmatrix} s + 1 + l_2 & 1 \\ -l_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2 + s(1 + l_2) + l_1}$$

Väl i parametrar: $k_r = \ell_1 \Rightarrow G_{ry}(0) = 1$

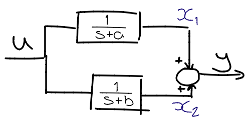
$\ell_1 = \omega_n^2$ Så vi väljer ℓ_1 utifrån spec.

$\zeta = \frac{1+\ell_2}{2\omega_n}$

Kan vi alltid bestämma egenvärdena till $A-BL_u$?

Detta är relaterat till systemets styrbarhet.

Ex



$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -bx_2 + u \Rightarrow$$
$$y = x_1 + x_2$$

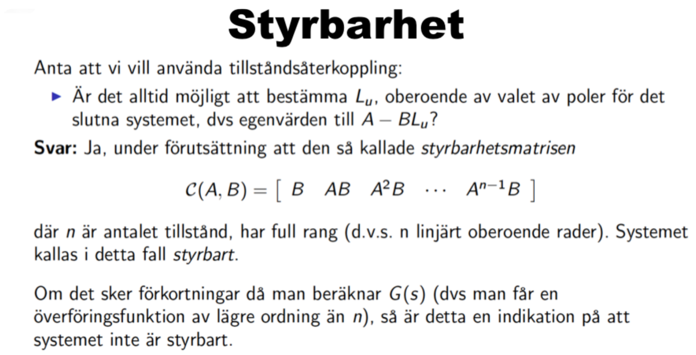
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \Rightarrow$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$
$$u = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + K_r \cdot r$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a\ell_1 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & -b-\ell_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} K_r \\ K_r \end{bmatrix} r, \quad KE: \det(sI - (A - BL_u)) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} s+a+\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & s+b+\ell_2 \end{pmatrix} = (s+a+\ell_1)(s+b+\ell_2) - \ell_1\ell_2 = s^2 + s(a+b+\ell_1+\ell_2) + ab + a\ell_2 + b\ell_1 = 0$$

$$a = b \Rightarrow \quad s^2 + s(2a+\ell_1+\ell_2) + a^2 + a(\ell_1+\ell_2) = \underset{}{\overset{\text{går ei att påverka}}{(s+a)}}\overset{\text{Går att påverka}}{(s+a+\ell_1+\ell_2)}$$

Egenvärdet $(-a)$ påverkas inte av återkopplingen $\Rightarrow$ Icke styrbart!



Styrbarhet

Anta att vi vill använda tillståndsåterkoppling:

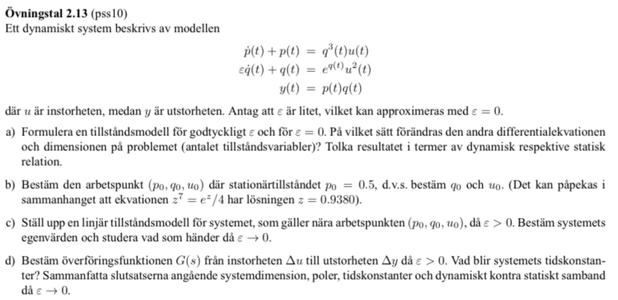
- Är det alltid möjligt att bestämma L_u, oberoende av valet av poler för det slutna systemet, dvs egenvärden till $A - BL_u$?

Svar: Ja, under förutsättning att den så kallade *styrbarhetsmatrisen*

$$\mathcal{C}(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

där n är antalet tillstånd, har full rang (d.v.s. n linjärt oberoende rader). Systemet kallas i detta fall *styrbart*.

Om det sker förkortningar då man beräknar $G(s)$ (dvs man får en överföringsfunktion av lägre ordning än n), så är detta en indikation på att systemet inte är styrbart.



Övningstal 2.13 (pss10)
Ett dynamiskt system beskrivs av modellen

$$\begin{aligned}\dot{p}(t)+p(t) &= q^3(t)u(t)\\ \varepsilon\dot{q}(t)+q(t) &= e^{q(t)}u^2(t)\\ y(t) &= p(t)q(t)\end{aligned}$$

där u är instorheten, medan y är utstorheten. Antag att ε är litet, vilket kan approximeras med $\varepsilon = 0$.

a) Formulera en tillståndsmodell för godtyckligt ε och för $\varepsilon = 0$. På vilket sätt förändras den andra differentialekvationen och dimensionen på problemet (antalet tillståndsvariabler)? Tolka resultatet i termer av dynamisk respektive statisk relation.

b) Bestäm den arbetspunkt (p_0, q_0, u_0) där stationärtillståndet $p_0 = 0.5$, d.v.s. bestäm q_0 och u_0. (Det kan påpekas i sammanhanget att ekvationen $z^7 = e^z/4$ har lösningen $z = 0.9380$).

c) Ställ upp en linjär tillståndsmodell för systemet, som gäller nära arbetspunkten (p_0, q_0, u_0), då $\varepsilon > 0$. Bestäm systemets egenvärden och studera vad som händer då $\varepsilon \to 0$.

d) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från instorheten Δu till utstorheten Δy då $\varepsilon > 0$. Vad blir systemets tidskonstanter? Sammanfatta slutsatserna angående systemdimension, poler, tidskonstanter och dynamiskt kontra statiskt samband då $\varepsilon \to 0$.

a) Godtyckligt ε

$$\begin{cases} x_1 = P \\ x_2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= P = -P + q^3 \cdot u = -x_1 + x_2^3 \cdot u \\ x_2 &= q = -\frac{1}{\varepsilon}q + \frac{1}{\varepsilon}e^{q \cdot u^2} = -\frac{1}{\varepsilon}x_2 + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_2 \cdot u^2}\end{aligned}$$

$y = x_1 x_2$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ x_1 oförändrad

$x_2 \longrightarrow \infty$, Oändligt stor derivata => jättesnabb dynamik, som ändras så fort att vi inte behöver reglera den (den långsamma dynamiken dominerar)

=> $x_2 = e^{x_2} u^2$, statisk relation! I vår tillståndsmodell vill vi bara ha derivator. Ta bort!

$$\begin{cases} x = x_1 = -x_1 + x_2^3 \cdot u \\ y = x_1 x_2 \end{cases}$$

, dimensionen minskade med ett!

b) Stationär pkt => Alla derivater = 0.

$$\begin{aligned} -x_{10} + x_{20}^3 u_0 &= 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon}x_{20} + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0^2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} -P_0 + q_0^3 u_0 &= 0 \\ -\frac{q_0}{\varepsilon} + \frac{e^{q_0}}{\varepsilon}u_0^2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} q_0^3 u_0 &= 0.5 \\ q_0 &= e^{q_0}u_0^2 \end{aligned} \Leftrightarrow u_0 = \frac{0.5}{q_0^3} \Rightarrow q_0 = e^{q_0}\frac{0.25}{q_0^6} \Rightarrow q_0^7 = e^{q_0}0.25$$

Givet är att: $z^7 = \frac{e^z}{4}$ har lösning $z = 0.938$ => $q_0 = 0.938$ => $u_0 = \frac{0.5}{0.938} \approx 0.6058$

Arbpkt: (0.5, 0.938, 0.6058)

c)
$$\begin{cases} \Delta x = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3x_2^2 u \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}e^{x_2}u^2 \end{bmatrix} \underset{(x_{10},x_{20},u_0)}{=} \begin{bmatrix} -1 & 3q_0^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x_2^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{x_2}u \end{bmatrix} \underset{(x_{10},x_{20},u_0)}{=} \begin{bmatrix} q_0^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{q_0}u_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3q_0^3 u_0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}e^{q_0}u_0^2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}e^{q_0}u_0^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}e^{q_0}u_0^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(-1 + \underbrace{e^{q_0}u_0^2}_{=q_0}\right) = -\frac{0.062}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\infty$$

d) Bestäm $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$, $\varepsilon > 0$

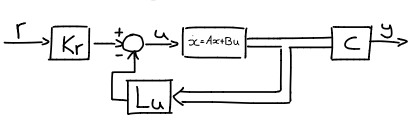
$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \ldots = \frac{q_0^4(s(\varepsilon+2)+8.062)}{(s+1)(\varepsilon s+0.062)}$$

Tidskonstanterna?

$$G(s) = K\frac{T_1 s+1}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\varepsilon+2}{8.062} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{2}{8.062}$$
$$T_2 = 1$$
$$T_3 = \frac{\varepsilon}{0.062} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

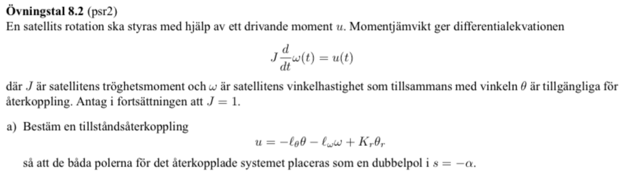
Om en pol/ett egenvärde eller en tidskonstan = 0 finns ett statiskt samband i systemet.
Då kan dimensionen reduceras.

Tillståndsåterkoppling



Styrlag: $u = -L_u \cdot x + K_r \cdot r$
L: Tillståndsåterkopplingskonstant
Kr: Förstärkningskonstant

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-L_u x + K_r \cdot r)$$
$$y = Cx \qquad = (A - BL_u)x + BK_r \cdot r$$



Övningstal 8.2 (psr2)
En satellits rotation ska styras med hjälp av ett drivande moment u. Momentjämvikt ger differentialekvationen

$$J\frac{d}{dt}\omega(t) = u(t)$$

där J är satellitens tröghetsmoment och ω är satellitens vinkelhastighet som tillsammans med vinkeln θ är tillgängliga för återkoppling. Antag i fortsättningen att $J = 1$.

a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta\theta - \ell_\omega\omega + K_r\theta_r$$

så att de båda polerna för det återkopplade systemet placeras som en dubbelpol i $s = -\alpha$.

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = u(t) \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) = u(t) \quad (J=1)$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u \end{matrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$u = -\ell_\theta\theta - \ell_\omega\omega + K_r\theta_r = \underbrace{\begin{bmatrix} -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix}}_{L} x + K_r\theta_r$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix} x + K_r\theta_r\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}\theta_r =$$
$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_\theta & -\ell_\omega \end{bmatrix}}^{A-BL_u} x + \overset{BK_r}{\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}}\theta_r$$

Önskad polplacering: $\alpha_c(s) = (s+\alpha)(s+\alpha) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$

$$\det(sI - (A - BL_u)) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} s & -1 \\ \ell_\theta & s+\ell_\omega \end{pmatrix} = s(s+\ell_\omega) + \ell_\theta = s^2 + \ell_\omega s + \ell_\theta = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \ell_\theta = \alpha^2 \\ \ell_\omega = 2\alpha \end{matrix} \Rightarrow L_u = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$\underline{K_r?\ G_{ry}(0) = 1}$ $\quad G_{ry}(s) = C(sI-(A-BL_u))^{-1}BK_r = \frac{1}{\det(sI-(A-BL_u))}\begin{bmatrix} s+\ell_\omega & 1 \\ -\ell_\theta & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{s^2+\ell_\omega s+\ell_\theta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_r \\ sK_r \end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2+\ell_\omega s+\ell_\theta} = \{s=0\} = \frac{K_r}{\ell_\theta} = 1 \Rightarrow K_r = \ell_\theta = \alpha^2 \Rightarrow u(t) = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & -2\alpha \end{bmatrix} x + \alpha^2\theta_r$$

Övningstal 8.7 (E20)
Ett linjärt system definieras av differentialekvationen $\dot{y}(t) = u(t)$, där u är insignal och y är utsignal. Systemet skall regleras genom tillståndsåterkoppling med integrerande verkan, innebärande att den utvidgade systembeskrivningen blir av ordning två. Processens tillstånd betecknas x_1 och regulatorns tillstånd x_2.

(a) Utför design av en sådan tillståndsåterkoppling där det återkopplade systemets poler placeras i $-1 \pm i\nu$. Vilket värde på ν motsvaras av ett kritiskt dämpat återkopplat system?

(b) Upprita ett tydligt schema över det återkopplade systemet, och bestäm istället parametern ν så att systemets fasmarginal blir 45 grader.

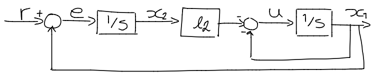
a) $x_1 = y$ $\qquad \dot{x}_1 = \dot{y} = u$

$x_2 = \int e dt = \int r - y dt = \int r - x_1 dt \qquad \dot{x}_2 = r - x_1$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

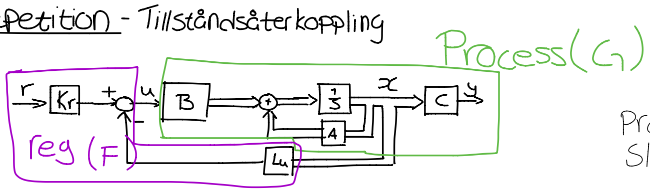
$u = -L_u x$,

$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2$



<u>OSV</u>

Repetition - Tillståndsåterkoppling



Processens poler: $\det(SI-A)=0$
Slutna sys poler: $\det(SI-(A-BLu))=0$

$x = Ax + Bu$
$y = Cx(+Du) \Rightarrow u = -Lu \cdot x + Kr \cdot r \Rightarrow \begin{cases} x = (A-B\cdot Lu)x + BKr \cdot r \\ y = Cx \end{cases}$

Vi kan placera poler hur vi vill givet att systemet är styrbart. Man kollar detta mha styrbarhetsmatrisen: $C = [B \;\; AB \;\; A^2B \ldots\ldots A^{N-1}B]$ Om C har full rang ($\det C \neq 0$) så är systemet styrbart.

Ex Förra föreläsningen.

$$x = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$y = [1 \;\; 1]x$

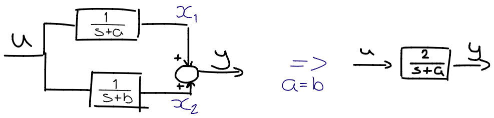
$u = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + Kr \cdot r$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad AB = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

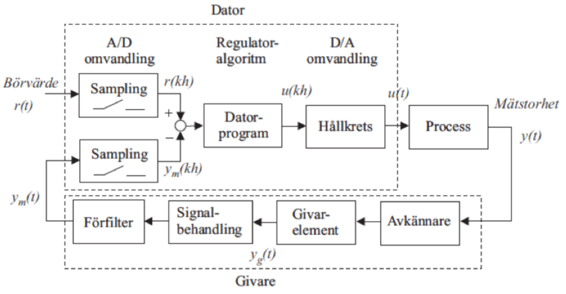
$C = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{bmatrix}$, $\det(C) = -b + a \neq 0$ omm $a \neq b$

Systemet är styrbart om $a \neq b$. Detta såg vi också i förra föreläsningen.



Implementering av reglersystem

Ett reglersystem implementeras oftast med dator/mikrocontroller:



Filter

Det är viktigt att filtrera signaler för att få bort högfrekvent mätbrus. Vi använder således ett lågpassfilter.

Från LP-filtret kan andra typer av filter fås genom enkla transformationer:

Butterworthfilter

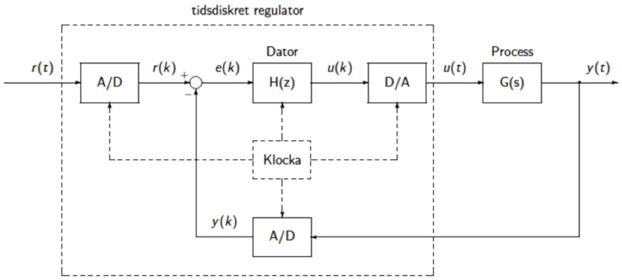
$H(s) = \frac{1}{1+sT}$ (Brytfrekvens $= \frac{1}{T}$)

$$\text{LP} \to \text{LP}: \quad s \to s/\omega_c$$
$$\text{LP} \to \text{HP}: \quad s \to \omega_c/s$$
$$\text{LP} \to \text{BP}: \quad s \to \frac{s^2 + \omega_L\omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)} = \frac{s^2 + \omega_M^2}{Bs}$$
$$\text{LP} \to \text{BS}: \quad s \to \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L\omega_H} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}$$

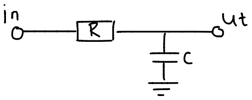
Konsekvens: Samplad reglering

Konsekvens 2:

- Processen är (oftast) tidskontinuerlig
- Regulatorn är tidsdiskret



Hur bygger vi våra filter?



Spänningsdelning: $\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + S(RC)}$

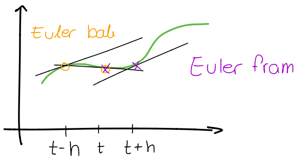
Diskretisering

Diskretisering kan göras på olika sätt:

Tidskontinuerligt — Tidsdiskret

Process / Regulator

$$\begin{tikzcd}
G(s) \arrow[r, "\text{① diskretisera}", "\text{process}"'] \arrow[d, "\text{tidskontinuerlig design}"'] \arrow[dr, dashed] & G_d(z) \arrow[d, "\text{tidsdiskret design}"] \\
R(s) \arrow[r, "\text{diskretisera}", "\text{regulator ②}"'] & R_d(z)
\end{tikzcd}$$



Enklaste idén att gå från en kontinuerlig modell till en diskret: ersätt derivatan med en *differensapproximation* med *samplingsintervallet h*:

1. $\dot{y}(t) \approx \frac{1}{h}(y(t) - y(t-h)) = \frac{1}{h}(y(kh) - y((k-1)h))$ *"Euler bakåt"*
2. $\dot{y}(t) \approx \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t)) = \frac{1}{h}(y((k+1)h) - y(kh))$ *"Euler framåt"*

$y(t) = \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$

$y(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$

En metod, som har vissa fördelar (vi återkommer till dessa), bygger på trapetsregeln för numerisk integration:

3. $\hat{\dot{y}}(t) \approx \frac{2}{h}(y(t) - y(t-h)) - \hat{\dot{y}}(t-h)$ *Tustins/bilinjär approximation*

där $\hat{\dot{y}}(t)$ är approximationen av $\dot{y}(t)$.

Diskretisering: exempel

Tidskontinuerlig modell:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \tag{5}$$

Euler bakåt ger

$$\frac{1}{h}(y(t) - y(t-h)) + ay(t) = bu(t)$$

Vi intresserar oss nu bara för samplingstidpunkterna $t = kh$, $k = 1, 2, \ldots$
Detta ger en tidsdiskret modell i form av en *differensekvation*:

$$\frac{1}{h}(y(kh) - y((k-1)h)) + ay(kh) = bu(kh) \quad \Leftrightarrow$$

$$(1 + ah)y(k) - y(k-1) = bhu(k) \tag{6}$$

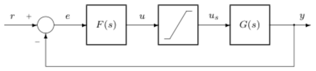
där för enkelhets skull samplingsintervallet valts som tidsenhet, dvs $h = 1$.

Notera att modellen (6) är en *algoritm* för att beräkna systemets utsignal!

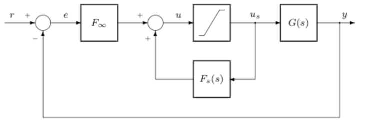
Övningstal 9.13 (pirWindup)
I praktiska reglersystem begränsas normalt den styrsignal som generas till processen via en begränsningsfunktion. Den begränsade styrsignalen $u_s(t)$ (s=saturation) kan då uttryckas som

$$u_s = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & u < u_{min} \end{cases}$$

Begränsningsfunktionen illustreras också i följande blockschema.



Då styrsignalen hamnar i begränsningsläget upphör återkopplingen temporärt att fungera, eftersom styr. cessen $u_s(t)$ då är konstant (lika med u_{min} eller u_{max}). Detta leder till problem då regulatorn i sig är instabil, vilket gäller exempelvis i det vanligt förekommande fallet att regulatorn $F(s)$ är en PI-regulator. Ett sätt att råda bot på detta problem visas i följande blockschema, där den begränsade styrsignalen u_s återkopplas via positiv återkoppling.



Denna realisering ger ett väl fungerande system då överföringsfunktionen $F_s(s)$ är *stabil* och konstanten K_∞ väljs lika med regulatorns högfrekvensförstärkning, d.v.s. $K_\infty = F(\infty)$.

a) Bestäm $F_s(s)$ då

$$F(s) = 3\,\frac{s + 0.5}{s}$$

så att reglersystemen i de båda ovanstående figurerna får samma beteende så länge som styrsignalen u håller sig innanför begränsningarna u_{min} och u_{max} (med andra ord bortse från begränsningsfunktionen).

b) Antag att $u_{max} = 10$ och att referenssignalen $r(t)$ varieras så att reglerfelet e hamnar på en konstant nivå $e = 5$. Ange för de båda regulatorstrukturerna det asymptotiska beteendet hos signalen $u(t)$ för stora värden på t efter att inledande transienter har klingat av. I det första fallet bortses från eventuella konstanta bidrag hos $u(t)$. Kommentera skillnaden i beteende mellan de båda reglerfunktionerna.

a) $F(s) = \frac{3(s+0.5)}{s}$

$F_\infty = F(\infty) = 3$

Utgå från blockschemat och sätt $U_s = U$. $U(s) = E(s)F_\infty + F_s(s)U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{F_\infty}{1-F_s(s)} \cdot E(s)$

$F(s) = \frac{F_\infty}{1-F_s(s)} \Leftrightarrow F(s)(1-F_s(s)) = F_\infty \Leftrightarrow F_s(s) = 1 - \frac{F_\infty}{F(s)} = 1 - \frac{3}{\frac{3(s+0.5)}{s}} = \frac{0.5}{s+0.5}$

Fall 1: Utan intern återkoppling

$e(t) = 5\theta(t) \Rightarrow E(s) = \frac{5}{s}$

$U(s) = F(s)E(s) = \frac{3(s+0.5)}{s} \cdot \frac{5}{s} = \frac{15}{s} + \frac{7.5}{s^2}$

$u(t) = (15 + 7.5t)\theta(t)$

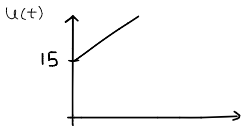
Fall 2: Med intern återkoppling

$U_s(t) = 10\theta(t),\ e(t) = 5\theta(t)$

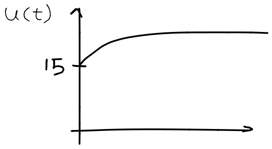
$U(s) = E(s)F_\infty + U_s \cdot F_s(s) = \frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{10}{s} \cdot \frac{0.5}{s+0.5} = \frac{25}{s} - \frac{10}{s+0.5}$

$U(t) = (15 + 10 - 10e^{-0.5t})\theta(t)$

Fall 1



Fall 2



Övningstal 9.1 (pir1)
Nedanstående fysikaliska system är givna med tidskontinuerliga överföringsfunktioner. Antag att systemen samplas och att insignalen är konstant över varje samplingsintervall h. Beräkna motsvarande tidsdiskretiserade överföringsfunktioner. Bestäm även de tidsdiskreta polerna i deluppgift a)-e). Jämför och kommentera!

a) $G(s) = \frac{3}{1+s}$ $\qquad h = 1\,\mathrm{s}$

1. Ta fram tillståndsmodell för kontinuerliga systemet

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{1+s}U(s) \Leftrightarrow (1+s)Y(s) = 3U(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \dot{y}(t) + y(t) = 3u(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = -x(t) + 3u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Tidskont: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Tidsdiskret: $x(kh+h) = A_d x(kh) + B_d u(kh)$
$y(kh) = C(kh) + Du(kh)$

$A_d = e^{Ah}$, $B_d = \int_0^h e^{A \cdot s} ds \cdot B$

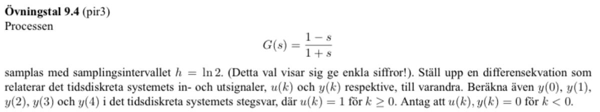
Vi har: $A = -1$, $B = 3$, $C = 1$, $D = 0$

$$\begin{matrix} A_d = e^{-h} \\ B = 3(1-e^{-h}) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x(kh+h) = e^{-h} \cdot x(kh) + 3(1-e^{-h})u(kh) \\ y(kh) = x(kh) \end{cases}$$

Ztransform: $X(z)(z-e^{-h}) = 3(1-e^{-h})U(z) \implies G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} = \{h=1\} = \frac{1.896}{z-0.368}$

$Y(z) = X(z)$

Polerna ges av $z=0.368$
$(z = e^{sh})$



Övningstal 9.4 (pir3)
Processen

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

samplas med samplingsintervallet $h = \ln 2$. (Detta val visar sig ge enkla siffror!). Ställ upp en differensekvation som relaterar det tidsdiskreta systemets in- och utsignaler, $u(k)$ och $y(k)$ respektive, till varandra. Beräkna även $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ och $y(4)$ i det tidsdiskreta systemets stegsvar, där $u(k) = 1$ för $k \geq 0$. Antag att $u(k), y(k) = 0$ för $k < 0$.

Gradtal täljare = Gradtal nämnare
<=>
Direktterm

Direktterm

$G(s) = \frac{1-s}{1+s} = \frac{2}{1+s} - 1$ $X(s) = \frac{2}{1+s}U(s)$ $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{1+s}U(s) - U(s)$

Tillståndsmodell: $\dot{x}(t) = -x + 2u$ $A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=-1$
$y(t) = x - u$

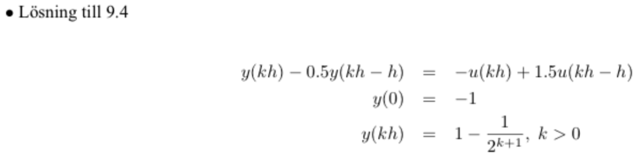
$A_d = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2},\quad B_d = 1$

Differensekvation: $x(kh+h) = \underline{0.5x(kh) + u(kh)}$
$y(kh) = x(kh) - u(kh)$

Beräkna: $y(0), y(1), \dots y(4)$ för $u(k) = \begin{cases} 1 & k>0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$ givet att $y(k)=0$ om $k<0$.

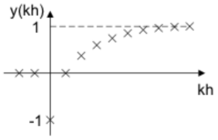
$y(kh+h) = x(kh+h) - u(kh+h) = \underline{0.5x(kh) + u(kh)} - u(kh+h)$
$y(kh+h) + u(kh+h) = \underline{0.5x(kh)} + u(kh)$
$y(kh+h) + u(kh+h) = \underline{0.5y(kh) + 0.5u(kh)} + u(kh)$
$y(kh+h) - 0.5y(kh) = -u(kh+h) + 1.5u(kh)$

$y(0) = 0.5y(-h) - u(0) + 1.5u(-h) = 0 - 1 + 0 = -1$
$y(h) = 0.5y(0) - u(h) + 1.5u(0) = 0$



- Lösning till 9.4

$$\begin{aligned} y(kh) - 0.5y(kh-h) &= -u(kh) + 1.5u(kh-h) \\ y(0) &= -1 \\ y(kh) &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ k > 0 \end{aligned}$$



Övningstal 9.6 (pirLFHF)
En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

a) Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$, och ange speciellt resultatet för samplingsintervallet $h = \ln 2$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h speciellt för korta och långa intervall.

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = 2.5\left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right)$$

Om $F(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \dot{x} = -ax + u$, $A_d = e^{-ah}$, $B_d = \int_0^h e^{as} ds = \frac{1}{a}(1-e^{-ah})$

$$\underbrace{x(kh+h)}_{z \cdot x(kh)} = e^{-ah} \cdot x(kh) + \frac{1}{a}(1-e^{-ah})u(kh)$$

$$(z - e^{-ah})x(kh) = \frac{1}{a}(1-e^{-ah})u(kh) \Rightarrow F_d(z) = \frac{\frac{1}{a}(1-e^{-ah})}{z - e^{-ah}}$$

$$G_d(z) = 2.5\left(\frac{2(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{(1-e^{-2h})}{z-e^{-2h}}\right) = \frac{2.5(1-e^{-h})^2(z+e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} = \{h = \ln 2\} = \frac{0.625(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

Tenta 2015-04-15, uppg 1

$G_c(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$

1: $K_p = 2, \quad K_d = 1$

2: $K_p = 1, \quad K_d = 2$

$$KE: \; s^2 + K_d s + K_p = \left(s + \frac{K_d}{2}\right)^2 - \left(\frac{K_d}{2}\right)^2 + K_p = 0 \Rightarrow s = -\frac{K_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_d}{2}\right)^2 - K_p} \Rightarrow$$

$$1: \; s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$2: \; s = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

2 har reella poler => Plot C

1 stegsvar A: $K_p = K_d = 1 \qquad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K_p} = 1$

$\zeta = \frac{K_d}{2\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

För 1: $\zeta = \frac{K_d}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35 < 0.5$

Vi har alltså lägre dämpning i 1 än i plot A => 1 matchar B.

Uppgift 4

Givet

Massa m med pos: $y(t)$

$m\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t)$ k: fiäder, b: friktion, u: yttre kraft

$y(t) = 0$ är massans viloläge då $u(t) = 0$

$m = k = 1$

a) $\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}\left(u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t)\right) = u(t) - x_1(t) - bx_2(t) \end{aligned}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

QED

b) $b = 0.5$

$u(t) = -L_u x(t) + K_r \cdot r(t)$

Vi vill ha en dubbelpol i -2. & $L_u = [l_1 \;\; l_2]$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \end{bmatrix} x + K_r \cdot r\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 & -l_2 \end{bmatrix}\right) x + \begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix} r = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-l_1 & -b-l_2 \end{bmatrix}}_{A - BL_u} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ K_r \end{bmatrix}}_{BK_r} r$$

$$\det\left(sI - (A - BL_u)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1+l_1 & s+b+l_2 \end{bmatrix}\right) = s(s+b+l_2) - (-1)(1+l_1) = s^2 + (b+l_2)s + 1 + l_1 = 0$$

dubbelpol i -2: $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 \Rightarrow \left.\begin{aligned} b + l_2 &= 4 = 4 - b = 4 - 0.5 = 3.5 \\ 1 + l_1 &= 4 \Rightarrow l_1 = 3 \end{aligned}\right\} L_u = [3 \;\; 3.5]$

c) $R(s) = \frac{1}{s}$

Vad blir $y(t)$ när massan m ställt in sig i sin nya position?

Vad är ett lämpligt värde på Kr?

$Y(s) = G(s)R(s)$

$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{ry}(s) \cdot R(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot G_{ry}(s) \frac{1}{\cancel{s}} = G_{ry}(0)$

Bestäm Kr så att $G_{ry}(0) = 1$ $\qquad y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \overset{r=1}{r(t)} \Rightarrow y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

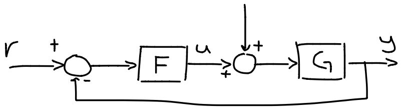
$$G_{ry}(s) = C\left(SI-(A-BL_u)\right)^{-1} BK_r = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\det(SI-(A-BL_u))}\begin{bmatrix} s+b+\ell_2 & 1 \\ -1-\ell_1 & s\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 \\ K_r\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^2+4s+4}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_r \\ sK_r\end{bmatrix} = \frac{K_r}{s^2+4s+4}$$

$$G_{ry}(0) = \frac{K_r}{4} = 1 \Rightarrow K_r = 4 \Rightarrow u(t) - [3 \quad 3.5]x(t) + 4r(t)$$

Tentanen 2013-08-22 UPPG 4

$G(s) = \frac{1}{s(s+8)^2}$



Givet

Bort med kvarstående fel efter en stegstörning v.

$\varphi_m = 50°$

a) Sätt $F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$

$w_c = 0.4 w_{150}$, $\angle G(jw_{150}) = -150°$

$\arg\{G(jw_{150})\} = -90° - 2\tan^{-1}\left(\frac{w_{150}}{8}\right) = -150° \Rightarrow w_{150} = 8\tan\left(\frac{150-90}{2}\right) \approx 4.62 \frac{rad}{s} \Rightarrow w_c \approx 1.85 \frac{rad}{s}$

$\varphi_m = 180° + \arg\{L(jw_c)\} \Rightarrow \arg\{F(jw_c)\} = 50° - 180° - \arg\{G(jw_c)\} \approx -14°$

$\arg\{F(jw_c)\} = \arg\left\{\frac{K_p(1+T_i j w_c)}{1+T_i j w_c}\right\} = \tan^{-1}(T_i w_c) - 90° = 14° \Rightarrow T_i = \frac{1}{w_c}\tan(90°-14°) \approx 2.17$

$|L(jw_c)| = 1$

$|L(jw_c)| = |F(jw_c)||G(jw_c)| = 1 \Rightarrow |F(jw_c)| = \frac{1}{|G(jw_c)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{jw_c(jw_c+8)^2}\right|} = \frac{1}{\frac{1}{w_c(w_c^2+8^2)}} \approx 124.73$

$|F(jw_c)| = \left|K_p\left(\frac{1+T_i j w_c}{T_i j w_c}\right)\right| = \frac{K_p\sqrt{(T_i \cdot w_c)^2+1}}{T_i w_c} = 124.73 \Rightarrow K_p \approx 121$

b) $G(s) = \frac{1}{s(s+8)^2} \cdot e^{-T_d s}$ (Td = fördröjning, bidrar med neg fasvridning)

$\arg\{e^{-T_d j w}\} = -T_d w \cdot \frac{180}{\pi}$

$\varphi_m = 50°$ blir noll om $-T_d w_c \cdot \frac{180}{\pi} = -50 \Rightarrow T_d = \frac{50\pi}{w_c 180} \approx 0.47s$